

Cahier de vacances

MPSI \Rightarrow MP

C'est les vacances... Enfin presque!

- Voici une fiche qui vous propose, sans prétendre à l'exhaustivité, un tour d'horizon de votre année en mathématiques. Vous devez chercher **toutes** les questions. Même si vous n'arrivez pas à les résoudre complètement, l'aller-retour entre la partie du cours concernée et l'exercice vous sera profitable.
- Vous rédigez avec soins vos solutions sur une copie **anonymisée** par un code personnel ; la copie est à rendre le jour du stage de rentrée.
- La plupart des exercices sont des questions de cours ou d'application du cours sauf ceux signalés par un symbole [♠] qui nécessiteront peut-être une recherche plus approfondie. Les [♥] signalent des questions classiques donc incontournables.

Thème 1. Calculs algébriques

► Exercice 1.

- ☐ Connaître les sommes classiques.
- ☐ Calculer des sommes simples ; des sommes doubles.

1. Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=1}^n k^2 \quad ; \quad B_n = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (k + \ell)^2 \quad ; \quad C_n = \sum_{k=0}^n 2^k \quad ; \quad D_n = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} 2^{k+\ell}.$$

2. [♥] Énoncer la formule du binôme puis calculer les sommes suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \quad ; \quad F_n = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \quad ; \quad [\spadesuit] \quad G_n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}^2.$$

► Exercice 2.

- ☐ Sommes géométriques.
- ☐ Calculer avec des nombres complexes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $\omega_k = \omega^k$

- [♥] Calculer ω^n . En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{2}{1 - \omega}$.
- En déduire les deux égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}.$$

- [♠] En remarquant que $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\omega_k^{-1}}{2}(1 + \omega_{2k})$ calculer le produit $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

On pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Thème 2. Algèbre linéaire

► Exercice 3.

- ☐ Montrer qu'une partie d'un ev est un ss-ev.
- ☐ Justifier que deux ss-ev sont supplémentaires.
- ☐ Étudier une forme linéaire.

1. On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ainsi que les sous-ensembles :

$$P = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = \varphi(x) \right\} \quad \text{et} \quad I = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = -\varphi(x) \right\}$$

- (a) Établir que P est un sous-espace vectoriel de E . On admet que c'est aussi le cas de I .
- (b) [♥] Rappeler la définition d'espaces supplémentaires puis justifier que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires dans E .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On note $\text{Tr}(A)$ la trace d'une matrice A .
- (a) [♥] Justifier que l'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

- (b) Que vaut Im Tr ? Soit $H = \text{Ker Tr}$. Donner la dimension de H et une base de H en utilisant les matrices de la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour rappel, la matrice $E_{i,j}$ est celle dont tous les éléments sont nuls sauf en ligne i et colonne j où il est égal à 1.
- (c) [♠] Soit une forme linéaire $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \varphi(AB) = \varphi(BA)$. Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

► Exercice 4.

- ☐ Base et dimension d'un ss-ev.
- ☐ Famille libre ; famille génératrice ; base.
- ☐ Projecteur.

On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dont les vecteurs seront notés en colonne. Soit F le sous-

ensemble de \mathbb{R}^4 des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ tels que : $\begin{cases} x + y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer une base \mathcal{B}_1 de F et donner la dimension de F .

3. On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $G = \text{Vect}(u, v, w)$.

- (a) Rappeler la définition de G .
- (b) Déterminer une base \mathcal{B}_2 de G et donner la dimension de G .

4. Déterminer le sous-espace $F \cap G$. Justifier que F et G sont supplémentaires dans E et conclure que la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ est une base de E .

On note p le projecteur sur F parallèlement à G .

5. Rappeler la définition de p . À quoi est égal $\text{Im } p$? $\text{Ker } p$? $p \circ p$? Donner la matrice de p dans la base \mathcal{B} .
6. [♠] Déterminer la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

► **Exercice 5.**

- ☐ Matrice d'un endomorphisme.
- ☐ Calculs de rang, d'inverse, de noyau, d'image.
- ☐ Formule de changement de base.

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E . On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 \quad ; \quad f(e_2) = e_1 + e_3 \quad ; \quad f(e_3) = -2e_1.$$

On note Id_E l'application identité de E et O_E l'application nulle de E dans E .

1. Déterminer la matrice A de f dans la base \mathcal{B} puis calculer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Une étude de l'endomorphisme f .
 - (a) Calculer le rang de A . En déduire que f est un automorphisme de E . Que vaut $\text{Im } f$? $\text{Ker } f$?
 - (b) Calculer $\det f$ et retrouver le résultat de la question précédente.
 - (c) Déterminer la matrice A^{-1} .
3. On considère l'endomorphisme $g = f - \text{Id}_E$.
 - (a) Vérifier que la matrice de g dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et calculer le rang de g .
 - (b) Montrer que le vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$ appartient au noyau de g et en déduire $\text{Ker } g$.
4. Soient $v = e_1 - e_2 + e_3$ et $w = 4e_1 + 2e_2 + e_3$. Exprimer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et w .
5. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est base de E .
6. Sans autre calcul, donner la matrice de f dans la base \mathcal{B}' . On notera D cette matrice.
7. [♥] Déterminer P , la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' et exprimer la matrice A à l'aide de P, D et P^{-1} .
8. [♠] Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f - \lambda \text{Id}_E$ est un automorphisme de E .

► **Exercice 6.**

- ☐ Calculs matriciels.
- ☐ Exercice de synthèse dans un espace de polynômes.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice carrée $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de taille n dont les coefficients sont donnés par :

$$d_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j ; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer les coefficients $(MD)_{k,\ell}$ et $(DM)_{k,\ell}$ des matrices produits MD et DM .
2. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec D .

On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Nous considérons l'ensemble $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$ ainsi que l'application ψ définie de $\mathbb{R}[X]$ vers lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \psi(P) = XP'.$$

3. Que vaut $\dim \mathbb{R}_n[X]$? Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Justifier que la famille $\mathcal{B}_n = X, X^2, \dots, X^n$ est une base de E_n . Quelle est la dimension de E_n ?
5. Montrer que ψ est linéaire puis qu'elle induit un endomorphisme ψ_n de l'espace E_n . Que vaut la matrice de ψ_n dans la base \mathcal{B}_n ? En déduire $\det \psi_n$.
6. [♠] On note $\mathcal{C}(\psi_n)$ l'ensemble des endomorphismes de E_n qui commutent avec ψ_n .
 - (a) Justifier que $\mathcal{C}(\psi_n)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}(E_n)$ des endomorphismes de E_n .
 - (b) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(\psi_n)$.

Thème 3. Analyse réelle

► Exercice 7.

- ☐ Calculs de limites ; croissances comparées usuelles.
- ☐ Développements limités ; équivalents simples (à réviser!).

Calculer les limites suivantes.

1. Suites.

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} \quad ; \quad [\heartsuit] \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad ; \quad [\spadesuit] \quad (c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{1}{\ell}.$$

2. Fonctions numériques.

- Utilisation de comparaisons ou croissances comparées usuelles.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3 + 1}} \quad ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \quad ;$$

- Utilisations d'équivalents ou de développements limités.

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{x} \quad ; \quad (e) \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos(t) \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \quad ; \quad (f) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cos(\theta) - \sin(\theta)}{\theta^3} \quad ;$$

- $[\spadesuit]$ Comme vous pourrez.

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt \quad ; \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right)^{1/x} \quad ; \quad (i) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

► Exercice 8.

- ☐ Étude de fonction ; fonctions trigonométriques.
- ☐ Théorème de la bijection monotone ; dérivabilité d'une réciproque.
- ☐ Intégration.

On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

1. Réaliser l'étude **complète** de la fonction h et tracer l'allure de sa courbe représentative \mathcal{C}_h dans un repère orthonormé direct.
2. (a) Montrer que h induit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers $[1, +\infty[$. On note ψ la **réciproque** de la bijection ainsi définie.
(b) Justifier que ψ est dérivable sur $]1, +\infty[$ mais pas en 1. Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\psi'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

3. Justifier l'affirmation ci-dessous :

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}.$$

► **Exercice 9.**

- ☐ Étude d'une suite récurrente.
- ☐ Théorème des accroissements finis.
- ☐ Un soupçon de Python.

On considère la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ définie par son premier terme $z_0 \in [0, 1]$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = g(z_n),$$

où g est la fonction définie par $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$.

1. **Étude de g .**

- (a) À l'aide d'une étude de fonction, montrer que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.
- (b) En utilisant un théorème des accroissements finis, justifier que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ on a l'inégalité

$$|g(y) - g(x)| \leq \frac{1}{4}|x - y|.$$

- (c) [♥] En déduire que g admet un unique point fixe $\ell \in [0, 1]$.

2. **Étude de la suite.**

- (a) [♥] Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $z_n \in [0, 1]$ et que $|z_n - \ell| \leq \frac{1}{4^n}$.
- (b) En déduire que $(z_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ .
- (c) Rédiger un programme Python qui calcule une valeur approchée à 10^{-3} près de ℓ . Préciser la valeur approchée obtenue pour ℓ .

3. **Une série.** Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (z_n - \ell)$?► **Exercice 10.**

- ☐ Utiliser la définition de limite.
- ☐ Analyse asymptotique : équivalents.

1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$.

- (a) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq \delta \implies |f'(x) - 1| \leq \varepsilon$$

- (b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq \delta \implies |f(x) - x| \leq \varepsilon(x - \delta) + |f(\delta) - \delta|$$

- (c) Conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

- (d) On suppose plus généralement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell$ avec $\ell \neq 0$. Quel équivalent simple obtient-on pour $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?

2. **Application.** Soit h une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1}{1 + h^2(x)}.$$

- (a) Justifier que la fonction h est croissante puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- (b) [♠] Montrer que :

$$h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3x}$$

Thème 4. Probabilités

► Exercice 11.

- ☐ Variables aléatoires.
- ☐ Lois de probabilités usuelles (Bernoulli, binomiale).

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un réel $p \in]0, 1[$. On considère une famille de variables aléatoires *indépendantes* $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ définies sur Ω et à valeurs dans $\{0, 1\}$ qui suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p .

1. Expliciter la loi de probabilité de X_1 .

2. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires : $S = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T = \prod_{k=1}^n X_k$.

► Exercice 12.

- ☐ Loi de probabilité usuelle (uniforme).
- ☐ Calculs d'espérance.

Une urne contient N boules, indiscernables au toucher, numérotées de $\textcircled{1}$ à \textcircled{N} . On réalise deux tirages successifs et avec remise d'une boule. On note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire donnant le numéro de la boule au premier (resp. second) tirage. On définit alors la variable aléatoire $U = \max(X_1, X_2)$.

1. Préciser la loi de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 . Donner leur espérance respective.
2. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(U \leq k)$.
3. [♥] Justifier que pour une variable aléatoire Z à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ nous avons la formule :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{\ell=1}^N \mathbf{P}(Z \geq \ell).$$

4. [♠]

(a) Calculer $\mathbf{E}(U)$ puis vérifier que $\mathbf{E}(U) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3}N$.

(b) Déterminer de même un équivalent simple pour $\mathbf{E}(V)$ quand $N \rightarrow +\infty$ avec $V = \min(X_1, X_2)$.



Exercices de la banque CCINP

MPSI \Rightarrow MP

Vous trouverez dans ce document des exercices (ou morceaux d'exercices) issus de la banque des épreuves orales CCINP. Les candidats admissibles sont interrogés durant l'épreuve sur un des exercices de cette banque. Vous les rencontrerez également au programme des colles durant l'année de MP.

Les questions qui suivent sont accessibles en fin de première année. Il est judicieux de travailler ces exercices pendant la pause estivale, c'est une excellente préparation à la deuxième année.

L'un des exercices ci-dessous sera dans le premier DS.

Indiquez les exercices abordés : ☒. Tous les énoncés et corrigés sont accessibles à l'adresse :

www.concours-commun-inp.fr/fr/epreuves/les-epreuves-orales.html

ANALYSE

□ **Exercice 2.** On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

□ **Exercice 3.**

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

□ **Exercice 4.**

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) \Rightarrow (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

□ **Exercice 42.** On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

□ **Exercice 43.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
- (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur \mathbb{R} , telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

□ **Exercice 55.** Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

- (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
- (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
- Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

ALGÈBRE

□ **Exercice 59.** Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.

- Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 - sans utiliser de matrice de f ,
 - en utilisant une matrice de f .
- Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

□ **Exercice 60.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

- Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
- f est-il surjectif ?
- Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

□ **Exercice 62.** Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

- Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
- Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
- Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

□ **Exercice 64.** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f \implies \text{Im} f = \text{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$.
(b) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \implies E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.

□ **Exercice 69.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel. Déterminer le rang de A .

□ **Exercice 71.** Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

□ **Exercice 76.** Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

□ **Exercice 79.** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

□ **Exercice 80.** Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

□ **Exercice 84.**

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

□ **Exercice 85.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
 - (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.
 - (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
 a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

□ **Exercice 86.**

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
 - (a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
 - (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.
Indication : procéder par récurrence.
 - (c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

□ **Exercice 87.** Soient a_0, a_1, \dots, a_n , $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, \dots, b_n sont $n + 1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

□ **Exercice 89.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.
 Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

□ **Exercice 90.** \mathbb{K} désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de \mathbb{K} .

- Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
- Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
- Application** : on se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
 Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

□ **Exercice 92.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n . On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ où tr désigne la trace et A^\top désigne la transposée de A .

- Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
 Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.
 On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E . On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
- Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer F^\perp .

PROBABILITÉS

□ **Exercice 95.** Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

- Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
 Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
 On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
 On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
 (a) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 (b) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
- Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 (a) Déterminer la loi de X .
 (b) Déterminer la loi de Y .

□ **Exercice 104.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. (a) Calculer $E(X)$.
(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

□ **Exercice 105.**

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

- (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

□ **Exercice 107.** On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

□ **Exercice 109.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

□ **Exercice 112.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.