

**Devoirs de vacances**

**Mathématiques**

**Classes Préparatoires**  
**ECGA2**

Chèr(e) futur(e) élève de seconde année,

Voici venu le temps d'un repos bien mérité. Ce temps peut permettre à certains d'entre vous de faire le point sur des notions mal assimilées pendant l'année. C'est dans cet esprit que je vous propose ce devoir de vacances.

Trois parties le composent :

Vous trouverez dans une première partie des exercices « de révision ». Ces exercices ont été faits avec Monsieur VAILLANT pendant votre première année. Vous trouverez pour chacun d'entre eux les références qui vous permettront de retrouver le corrigé détaillé de votre professeur.

Dans une deuxième partie vous trouverez d'autres exercices pour vous entraîner.

Pour chaque exercice, vous trouverez dans la troisième partie de ce livret des aides et des solutions. Il est nécessaire de ne pas s'en tenir là. La rédaction, le raisonnement, la rigueur des calculs et de l'argumentation sont essentiels dans l'appréciation des copies des concours. Il vous faudra donc reprendre les corrigés des exercices « de révision » faits pendant votre première année pour vérifier votre travail.

En tout, ce sont 18 exercices ou problèmes qui vous sont proposés. Les 7 premiers ont déjà été faits en première année. Tous ces exercices peuvent être traités dans l'ordre proposé, ou bien par thèmes (toutes les limites, puis toutes les dérivées, puis...). Si vous n'avez pas le temps de tout faire, il est conseillé de travailler en profondeur certains thèmes (quitte à en délaisser d'autres) plutôt que d'avoir des connaissances imparfaites sur tout.

Ces exercices ne sont pas obligatoires et donc ne seront pas notés. Néanmoins vos connaissances de première année seront évaluées lors des premières khôlles de seconde année qui porteront exclusivement sur ce programme. Vous pourrez faire les exercices « d'approfondissement » sur votre cahier d'exercices de deuxième année.

En fin de ce petit livret vous trouverez également quelques conseils utiles pour réussir en classe préparatoire. Certains d'entre eux peuvent s'appliquer à votre travail estival, notamment la mise à jour de vos fiches de cours et d'erreurs (voir points **4.** et **5.** page 45).

Un autre livret « des oublis et des erreurs » vous a été distribué. Gardez le précieusement. Il vous servira toute l'année prochaine. Vous y trouverez les références mentionnées dans la partie 3 de ce livret. Vous pouvez d'ores et déjà le parcourir en cochant les méthodes ou formules que vous maîtrisez mal. C'est un très bon moyen de vérifier ces connaissances.

J'espère que ces livrets répondront à vos attentes et espère vous voir en grande forme à la rentrée.

B.BONNET

# Les révisions

## Exercice 1

Voir DS 5

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x$$

1. Écrire une fonction *Python* d'en-tête "`def f(x)`" qui prend un réel  $x$  en argument d'entrée et renvoie  $f(x)$  en sortie.

### 2. Étude de $f$

- a. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- b. Dresser le tableau de variations complet de  $f$  et étudier sa convexité.
- c. Montrer qu'il existe une fonction  $g$ , que vous déterminerez, telle que :

$$f(x) = x - g(x) = 0$$

- d. En déduire que l'équation  $f(x) = x$  possède une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $\alpha$ , dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.

### 3. Étude d'une première suite.

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$

- a. Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0; 1]$ .
- b. Démontrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$ .
- c. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$ .
- d. Montrer que : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ .
- e. Conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)$  et préciser sa limite.

### 4. Étude d'une seconde suite

- a. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans un intervalle à préciser.

Donner le tableau de variations de  $f^{-1}$ . On donne  $f^{-1}(0) \approx 2,11$

- b. Déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $x_n$ , tel que  $f(x_n) = \frac{1}{n}$ .
- c. Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in [0; 3]$ .
- d. Soit  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , exprimer  $x_n$  en fonction de  $n$  et de  $f^{-1}$ .
- e. En déduire la limite de  $x_n$ .

On considère la fonction  $f$  définie par  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1$  et  $f(0) = -1$

ainsi que les fonctions  $\varphi$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln x$

On donne le tableau de valeurs de  $f$  :

$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \approx$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en 0. En donner une interprétation graphique.
- Étudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini.
- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- Quel est le sens de variation de  $f^{-1}$ ? Déterminer la limite de  $f^{-1}(x)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini.
- Justifier que pour tout entier naturel  $k$ , il existe un unique réel  $x_k$  positif tel que  $f(x_k) = k$ .
  - Donner la valeur de  $x_0$ .
  - Utiliser le tableau de valeurs de  $f$  pour déterminer un encadrement de  $x_1$  et  $x_2$ .
  - Exprimer  $x_k$  à l'aide de  $f^{-1}$  puis justifier que la suite  $(x_k)$  est croissante et déterminer sa limite lorsque  $k$  tend vers l'infini.
- On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = \frac{3}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ 
  - Étudier les variations de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - On donne  $\varphi(\frac{3}{2}) \approx 1,73$  et  $\varphi(2) \approx 1,69$ . Montrer que  $\varphi([\frac{3}{2}; 2]) \subseteq [\frac{3}{2}; 2]$ .
  - En étudiant les variations de  $\varphi'$ , montrer que :  $\forall x \in [\frac{3}{2}; 2]$ ,  $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$ .
  - Montrer que les équations  $x = \varphi(x)$  et  $f(x) = 1$  sont équivalentes. En déduire que le réel  $x_1$  est l'unique solution de l'équation  $x = \varphi(x)$ .
  - Montrer successivement que pour tout entier  $n$  :  

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$$
  - En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

On considère la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$

- Calculer  $I_0$ .
- Montrer que  $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
- Montrer que  $(I_n)$  est décroissante et positive.
- En utilisant la question **b**, montrer que  $nI_n \leq e$ .

En déduire la limite de  $(I_n)$ .

## Exercice 4

## Voir CB2

## A. Autour des espaces vectoriels...

- Montrer que chacun de ces deux ensembles est **ou** n'est pas un espace vectoriel.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) / 3x + y^2 - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) / 3x - y + 4z = 0 \right\}$$

- Dans  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  on considère les vecteurs :  $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ .
- Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs de la base canonique dans la base  $(u, v, w)$ .
- Quelles sont dans cette base, les coordonnées du vecteur  $t = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

## B. Autour des applications linéaires...

- Une application linéaire de  $M_{2,1}(\mathbb{R})$  vers  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  peut-elle être surjective ? Justifier votre réponse.
- Soit  $f$  l'application :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + y - 3z \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ .
- Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .  $f$  est-elle injective ?
- Déterminer  $\text{Im}(f)$ .  $f$  est-elle surjective ?
- Soit  $M$  la matrice de  $f$  relative aux bases de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ . Sans calculer  $M$ , et en justifiant votre réponse, dire si  $M$  est ou n'est pas inversible.

**1. Questions préliminaires**

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  une matrice telle que :  $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$  et  $A \notin I$ .

- Démontrer que la matrice  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $I$ ,  $A$  et  $A^2$ .
- Déterminer les racines du polynôme  $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
- En déduire que la matrice  $A - 2I$  n'est pas inversible.
- Que peut-on dire alors du nombre de solutions de l'équation  $(A - 2I)X = 0$ , d'inconnue  $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$  ?

On considère à présent la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$  et on donne  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \\ 20 & -36 & 17 \end{pmatrix}$

2. Calculer  $A^3$  puis vérifier que  $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$

3. Résoudre l'équation  $AX = X$ , d'inconnue  $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ , puis en donner une solution, notée  $U_1$ , dont la première composante est égale à 1.

4. Notons  $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $U_2$  est solution de l'équation  $AX = 2X$ , d'inconnue  $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ .

5. Résoudre  $AX = 2X + U_2$ , d'inconnue  $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ , puis en donner une solution, notée  $U_3$ , dont la première composante est nulle.

6. Posons maintenant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

- Montrer que la matrice  $P$  est inversible et calculer son inverse.
- Calculer  $P^{-1}AP$ . On notera  $T$  la matrice obtenue.
- En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}$ ,  $A^n = PT^nP^{-1}$ .

d. Démontrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}$  :  $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

e. Justifier l'existence d'une matrice diagonale  $D$  telle que :  $T = D + N$ .

Montrer que  $D$  et  $N$  commutent.

f. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver l'expression de  $T^n$ .

g. Conclure sur l'expression de  $A^n$ .

Dans son atelier, John von Neumann possède une machine permettant de créer, pour chaque nombre réel  $p \in ]0,1[$ , une pièce tombant sur PILE avec probabilité  $p$ . On nomme "pièce équilibrée", une pièce dont la probabilité de tomber sur PILE est  $1/2$ .

L'exercice est composé de deux parties **indépendantes**. Dans tout l'énoncé, on note  $P(A)$  la probabilité d'un événement  $A$ .

### Première partie

On considère un nombre réel  $p \in ]0,1[$ , et on utilise dans cette partie, une pièce de l'atelier de von Neumann ayant une probabilité  $p$  de tomber sur PILE.

1. On lance successivement deux fois la pièce et on note à chaque fois le résultat (PILE ou FACE) obtenu.
  - a. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu PILE au cours de ces deux lancers. Reconnaître la loi de  $X$  et justifier votre réponse.
  - b. Calculer la probabilité  $P(X = k)$  pour toutes les valeurs  $k$  prises par  $X$ .  
Donner en particulier  $P(X = 1)$ .
2. Une *manche* consiste à lancer deux fois successivement la pièce et on nomme " succès " le fait d'obtenir deux résultats différents et " échec " celui d'obtenir deux résultats identiques. Quelle est la probabilité de " succès " de cette expérience de Bernoulli ?
3. On répète indéfiniment des manches comme ci-dessus. Chaque manche est supposée indépendante des autres. On note  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de manches effectuées jusqu'à l'obtention d'un premier succès.
  - a. Dans le cas où les tirages successifs sont PP, FF, PP, PP, FF, PF, FP, PP, ... (on a abrégé PILE en P et FACE en F), donner la valeur de  $N$ .
  - b. Reconnaître la loi de  $N$  et donner l'expression de  $P(N = k)$  pour toutes les valeurs  $k$  prises par  $N$ .
  - c. Donner, si elles existent, l'espérance et la variance de  $N$ .
4. Pour deux joueurs Alice et Bob souhaitant s'affronter, l'atelier de von Neumann conseille le jeu suivant : à l'aide d'une pièce de sa production, on réalise une manche comme ci-dessus puis une deuxième si la première manche est constituée de deux résultats identiques. On déclare alors Alice gagnante si l'issue d'une des deux manches est PF et Bob est gagnant si l'issue d'une des deux manches est FP. Dans les autres cas, la partie est nulle. Par exemple, si on lance la pièce et que l'on obtient la séquence suivante : FF, PF alors Alice est gagnante.
  - a. Calculer, en fonction de  $p$ , la probabilité qu'Alice gagne lors de la première manche.
  - b. Montrer que la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche (en particulier, aucun des deux joueurs ne remporte la première manche) est égale à  

$$p(1 - p)(p^2 + (1 - p)^2)$$
  - c. Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur du paramètre  $p$ , le jeu est équitable.

### Deuxième partie

Dans cette partie de l'exercice, on considère une pièce équilibrée ( $p = 1/2$ ) que l'on lance successivement trois fois. On note  $S$  la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces trois lancers. On note aussi  $T$  la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient aucun PILE lors de ces trois lancers et égale au rang du premier PILE obtenu si un PILE apparaît.

Par exemple, si une succession de trois lancers amène " FPF ", on a  $S = 1$  et  $T = 2$ .

5. Le programme *Python* ci-contre a pour objectif de simuler une succession de 3 lancers et d'afficher les valeurs prises par  $S$  et  $T$ .

Recopier et compléter la ligne 7 afin que ce programme affiche la bonne valeur de  $S$

```
1 import numpy.random as rd
2 S = 0
3 T = 0
4 for k in range(1,4):
5     r = rd.random()
6     if r < 1/2 :
7         S =...
8     if r < 1/2 and T == 0 :
9         T = k
10 print ("S = ",S,"et T = ",T)
```

6. Reconnaître la loi de  $S$ . Donner son espérance.

7. Quelles sont les valeurs possibles pour  $T$  ?

8. Décrire l'évènement  $((S = 2) \cap (T = 1))$  et calculer sa probabilité.



### Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant  $n$ .

D'après le premier des deux points précédents, on a donc  $X_0 = 1$ .

1. Donner la loi de  $X_1$ , ainsi que l'espérance  $E(X_1)$  de la variable  $X_1$ .

On admet pour la suite que la loi de  $X_2$  est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$ .

3. a. Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b. Vérifier que cette relation reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

c. Justifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$$

et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

d. Établir alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

4. a. En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b. En déduire une relation entre  $P(X_{n+1} = 2)$  et  $P(X_n = 2)$ .

c. Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

5. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}$$

et

$$P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{Q}, \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'espérance  $E(X_n)$  de la variable aléatoire  $X_n$ .

## Partie 2 : étude des puissances d'une matrice A

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}$ , on considère la matrice-ligne de  $M_{1,4}(\mathbb{R})$  :

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

7. a. Montrer (grâce à certains résultats de la **partie 1**) que, si l'on pose

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{Q}, \quad U_{n+1} = U_n A.$$

b. Établir par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{Q}, \quad U_n = U_0 A^n.$$

c. En déduire la première ligne de  $A^n$ .

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice  $A^n$ , puis écrire ces trois lignes.

## Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices  $I$  et  $J$  suivantes :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

9. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $A = aI + bJ$ .

10. a. Calculer  $J^2$  puis établir que, pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :  $J^k = 4^{k-1}J$ .

b. À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier  $n$  non nul, l'expression de  $A^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $J$ .

c. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour  $n = 0$ .

# Partie 2 : Pour approfondir

## Exercice 8 (d'après ESTP ECT 2013)

---

Soit  $f_0$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0,1]$  par  $f_0(x) = e^{-3x}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit la fonction  $f_n$  sur  $[0,1]$  par  $f_n(x) = (1-x)^n e^{-3x}$ .

On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

**1.** Calculer  $u_0$ .

**2. a.** Montrer que pour tout  $n$  on a :  $u_n \geq 0$

**b.** Étudier la monotonie de  $(u_n)$ .

**c.** En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**3. a.** Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

**b.** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**4. a.** A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier  $n$  la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} u_n$$

**b.** En déduire la limite en  $+\infty$  de  $nu_n$ .

**5.** On pose pour tout entier  $n$  :  $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3}$

**a.** Déterminer la limite de  $v_n$  en  $+\infty$ .

**b.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n$ .

### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$  pour tout réel  $x$  positif ou nul.  
On donne  $e \approx 2,7$ .

1. Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de la fonction  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ . (On précisera  $g(0)$ ).
3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution non nulle, notée  $a$  et que  $1 < a < 2$ .
4. Etudier le signe de  $g(x)$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$$

1. Justifier que  $f$  est continue sur  $]0 ; +\infty[$ .
2.  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifier.
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4. Montrer que  $\forall x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$$

5. En déduire le tableau de variations de  $f$ .
6. Montrer que  $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ .

### Partie C

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{Q}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$ .
2. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}$ , on a :  $0 \leq u_n \leq 1$ .
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{Q}}$  est décroissante.
4. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{Q}}$  est convergente et déterminer sa limite.
5. Ecrire un programme en *Python* permettant de trouver le premier entier  $n$  tel que :  $u_n \leq 10^{-3}$ .

## Exercice 10 (d'après EML 2018)

---

Dans tout cet exercice,  $f$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = x - \ln(x).$$

### Partie I : Étude de la fonction $f$

1. Dresser le tableau de variations de  $f$  en précisant ses limites en 0 et en  $+\infty$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ , admet exactement deux solutions, que l'on note  $a$  et  $b$ , telles que  $0 < a < 1 < b$ .
3. Montrer que  $b \in [2; 4]$ .  
On donne  $\ln(2) \approx 0,7$ .

### Partie II : Étude d'une suite

On pose :  $u_0 = 4$  et  $\forall n \in \mathbb{Q}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{Q}}$  est bien définie et que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{Q}, u_n \in [b; +\infty[$ .
2. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{Q}}$ .  
En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

3. a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{Q}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$$

- b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{Q}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

4. a. Écrire une fonction *Python* d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier  $n$  de  $\mathbb{Q}$ , renvoie la valeur de  $u_n$ .  
b. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction *Python* suivante afin que, prenant en argument un réel *epsilon* strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de  $b$  à *epsilon* près.

```
1. def valeur_approchee(epsilon) :  
2.     n = 0  
3.     while ..... :  
4.         n = n + 1  
5.     return suite(n)
```

### Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note  $\Phi$  la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$$

1. Montrer que  $\Phi$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

2. En déduire les variations de  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
3. Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 0 \leq \Phi(x) \leq x$ .
4. Montrer que  $\Phi$  est prolongeable par continuité en 0.  
On note encore  $\Phi$  la fonction ainsi prolongée. Préciser alors  $\Phi(0)$ .
5. On donne  $\Phi(2) \approx 1,1$  et on admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$ .

Tracer l'allure de la courbe représentative de  $\Phi$ .

### Exercice 11 (d'après EML 2000)

On considère la fonction  $f : ]-1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[ \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $]-1; +\infty[$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]-1; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x$  de  $]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$ , calculer  $f'(x)$ .

On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]-1; +\infty[$ .

3. Montrer que :  $\forall x \in ]-1; +\infty[, \frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$ .

En déduire les variations de  $f$ . On précisera les limites de  $f$  en  $-1$  et  $+\infty$ .

4. Montrer que, pour tout  $u \in ]-\frac{1}{2}; +\infty[$ , l'intégrale  $\int_x^{2x} f(t) dt$  existe.

5. On considère la fonction  $F : ]-\frac{1}{2}; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $u$  de  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ , par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

- a. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  et que  $F$  est croissante.

- b. Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) \geq xf(2x)$ .

- c. En déduire que  $F(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

6. Montrer que l'intégrale  $\int_{-1}^{-1/2} f(t) dt$  est convergente.

En déduire que la fonction  $F$  admet une limite finie de  $-\frac{1}{2}$ . On ne cherchera pas à calculer cette limite.

## Exercice 12 (D'après ECRICOME 2019)

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction  $f$  est paire.
2. Justifier que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge et calculer sa valeur.
3. a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel  $A$  strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t) dt = \int_1^A f(u) du$$

En déduire que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$  converge et donner sa valeur.

- b. Montrer que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire  $X$  admettant  $f$  pour densité. On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ .
  - a. Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- b. Démontrer que  $X$  admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
- c. La variable aléatoire  $X$  admet-elle une variance ?

### Partie I : Tirages dans une urne

Une urne  $U$  contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans  $U$ . On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
  - a. Quelle est la loi de  $X$  ?  
On précisera  $X(\Omega)$  et  $P(X = k)$  pour tout  $k \in X(\Omega)$ .
  - b. Donner la valeur de l'espérance de  $X$  notée  $E(X)$  et vérifier que la variance de  $X$ , notée  $V(X)$  est égale à 75.
2. On procède cette fois-ci dans  $U$  à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
  - a. Quelle est la loi de  $Y$  ?  
On précisera  $Y(\Omega)$  et  $P(Y = k)$  pour tout  $k \in Y(\Omega)$ .
  - b. Donner la valeur de  $E(Y)$  et vérifier que  $V(Y) = 12$ .
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne  $U$  successivement et sans remise les quatre boules. On note  $Z$  le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
  - a. Quelle est la loi de  $Z$  ?  
On précisera  $Z(\Omega)$  et  $P(Z = k)$  pour tout  $k \in Z(\Omega)$ .
  - b. Donner les valeurs de  $E(Z)$  et de  $V(Z)$ .

### Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne  $U$  contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne  $V$  contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans  $U$ , et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans  $V$ .

On note  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut  $T(\Omega)$  ?
2. Donner la loi de  $T$ . On vérifiera que  $P(T = 1) = \frac{7}{16}$
3. Calculer  $E(T)$ . La variable aléatoire  $T$  suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'évènement  $[T = 1]$  est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?



## Exercice 14

Pour chacune des parties A et B de cet exercice, l'urne considérée initialement contient 4 boules indiscernables au toucher : 1 **blanche** et 3 **rouges**.

Pour faciliter la rédaction, on pourra utiliser les événements  $R_k$  : "le  $k$ -ième tirage donne une boule rouge" et  $B_k$  : "le  $k$ -ième tirage donne une boule blanche".

### Partie A

On effectue des tirages d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

1. Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
2. Décrire l'événement  $(X = 2)$  et calculer  $p(X = 2)$ .
3. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance  $E(X)$  et sa variance  $V(X)$ .
4. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête.

Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .

En déduire la loi de  $Y$ , son espérance  $E(Y)$  et sa variance  $V(Y)$ .

### Partie B

Dans cette partie, on effectue des tirages d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne 2 boules consécutives de la même couleur.

On note  $Z$  la variable aléatoire égale au numéro (rang) du tirage où l'expérience s'arrête.

Par exemple, si les tirages ont donné successivement rouge, blanc, rouge, blanc, rouge, rouge alors  $Z = 6$ .

1. Quelles sont les valeurs prises par  $Z$  ?
2. Calculer  $p(Z = 2)$  et  $p(Z = 3)$ .
3. Décrire l'événement  $(Z = 4)$ , puis l'événement  $(Z = 2k)$  pour tout entier  $k \geq 1$ , et montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$  :

$$p(Z = 2k) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$

4. Décrire l'événement  $(Z = 5)$ , puis l'événement  $(Z = 2k + 1)$  pour tout entier  $k \geq 1$ , et montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$  :

$$p(Z = 2k + 1) = \left(\frac{3}{16}\right)^k$$

5. On pose :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} p(Z = 2k) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p(Z = 2k + 1)$$

Montrer que ces deux séries convergent et déterminer leurs sommes.

Vérifier que  $S_1 + S_2 = 1$ .

## Exercice 15 (HEC ECT 2006)

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille.

Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences.

On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.

Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité  $\frac{3}{4}$ ;
- si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , laissée à Marseille avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , et ramenée à Lyon avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ ;
- si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , laissée à Lyon avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ , et ramenée à Marseille avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}$ , on note  $R_n$  (respectivement  $L_n$ ,  $M_n$ ) l'événement « la voiture se trouve à Rennes (respectivement Lyon, Marseille) le soir du  $n^{\text{ième}}$  jour ».

On considère les probabilités suivantes :  $r_n = P(R_n)$ ,  $l_n = P(L_n)$  et  $m_n = P(M_n)$ .

On suppose qu'au départ, la voiture est à Rennes, et on pose donc :  $r_0 = 1$ ,  $l_0 = 0$ ,  $m_0 = 0$ .

On désigne par  $I$  la matrice identité d'ordre 3, définie par :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{Q}$ , on définit la matrice colonne à trois lignes  $U_n$  par :  $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ l_n \\ m_n \end{pmatrix}$ .

a. Vérifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}$ , on a la relation  $U_{n+1} = AU_n$ , où  $A$  est la matrice carrée

d'ordre 3 suivante :  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ .

b. Expliciter  $U_0$ . Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}$  on a :

$$U_n = A^n U_0$$

2. On se propose dans cette question de calculer  $A^n$ .

On considère la matrice  $S$ , carrée d'ordre 3, définie par :  $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

a. Montrer que la matrice  $S$  est inversible et calculer explicitement sa matrice inverse  $S^{-1}$ .

b. On pose  $\Delta = S^{-1}AS$ . Expliciter, sous forme de tableau, la matrice  $\Delta$ .

c. Donner, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}^*$ , l'expression sous forme de tableau de la matrice  $\Delta^n$ .

d. Exprimer  $A$  en fonction de  $S$ ,  $S^{-1}$  et  $\Delta$ . En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}^*$ , on a :

$$A^n = S\Delta^n S^{-1}.$$

e. Donner, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}^*$ , l'expression sous forme de tableau de  $A^n$ .

3. a. Exprimer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Q}^*$ ,  $r_n$ ,  $l_n$  et  $m_n$  en fonction de  $n$ .

b. Déterminer les limites de ces probabilités quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice 16 (Ecricome 2011)

On dit qu'une matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel  $k$  non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où  $0_n$  représente la matrice carrée nulle d'ordre  $n$ .

On dit qu'une matrice  $\Delta$  carrée d'ordre  $n$  est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telle que :  $P^{-1}\Delta P = D$

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , on dit que le couple  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de  $A$  lorsque

$\Delta$  est une matrice diagonalisable

$\{N \text{ est une matrice nilpotente}$

$$\Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta$$

1. On pose :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Vérifier que  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de  $A$ .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. Déterminer les valeurs propres de  $A$ .

b. Déterminer les vecteurs propres de  $A$  c'est-à-dire les matrices colonnes  $X$  de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  telles que  $AX = \lambda X$ , où  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .

3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculer les produits  $\Delta X_1$ ,  $\Delta X_2$  et  $\Delta X_3$ .

b. Montrer que la matrice  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

c. Déterminer une matrice diagonale  $D$  telle que :  $P^{-1}\Delta P = D$ .

d. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $\Delta^n = P D^n P^{-1}$ .

4. a. Etablir que  $N$  est une matrice nilpotente.

b. Vérifier que  $(\Delta, N)$  est une décomposition de Dunford de la matrice  $A$ .

c. En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de  $A^n$  en fonction des puissances de  $\Delta$ , de  $N$  et de  $n$ .

d. Etablir que : Pour tout entier naturel  $k \geq 1$ ,  $\Delta^k N = N$ .

e. Proposer une décomposition de Dunford de  $A^n$ .

## Exercice 17

---

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y' + 3y = 6$ . On donnera l'ensemble des solutions puis la fonction  $f$  solution de cette équation différentielle qui vérifie la condition :  $f(0) = -1$ .

2.  $2y' + 3y = 21x^3 + 6x^2 + 27x + 26$ . On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3.

3.  $y' - y = (2x + 1)e^{2x}$ . On cherchera une solution particulière sous la forme  $P(x)e^{2x}$  où  $P$  est une fonction polynôme.

4.  $y'' + 2y' + y = 1$

5.  $y'' + 3y' - 4y = x - 1$ . On donnera l'ensemble des solutions en recherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 puis la fonction  $f$  solution de cette équation différentielle qui vérifie la condition :  $f(0) = \frac{17}{16}$  et  $f'(0) = -\frac{1}{4}$ .

6.  $y'' - 4y = e^x + x$  Une solution particulière s'obtiendra en ajoutant une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' - 4y = e^x$  sous la forme  $x \rightarrow ke^x$  et une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' - 4y = x$  sous la forme d'un polynôme du premier degré.

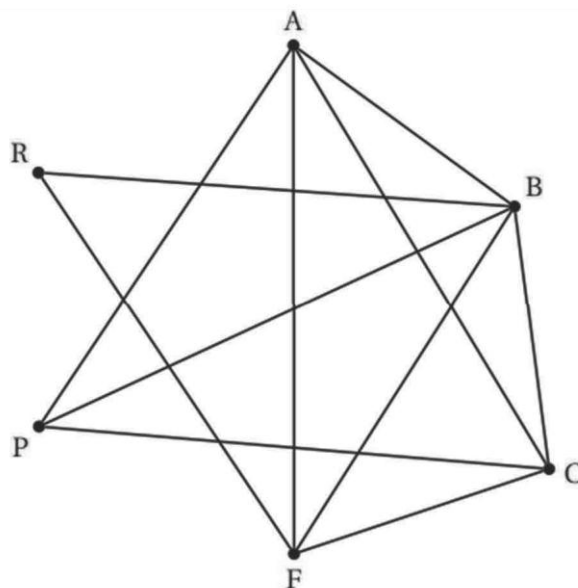
## Exercice 18

---

L'organisatrice d'une course à pied dans la ville de Berlin voudrait faire passer les participants par les lieux suivants :

- Alexanderplatz (A)
- Porte de Brandebourg (B)
- Checkpoint Charlie (C)
- Fleamarket (F)
- Musée de Pergame (P)
- Reichstag (R)

On peut résumer la situation par le graphe ci-dessous :



Les lieux sont représentés par les sommets, et les rues ouvertes à la course par les arêtes.

1. a. Quel est l'ordre de ce graphe ?

b. Est-il complet ? Justifier.

c. Est-il connexe ? Justifier.

2. a. L'organisatrice peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues? Justifier.

b. Peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit?

3. Donner la matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

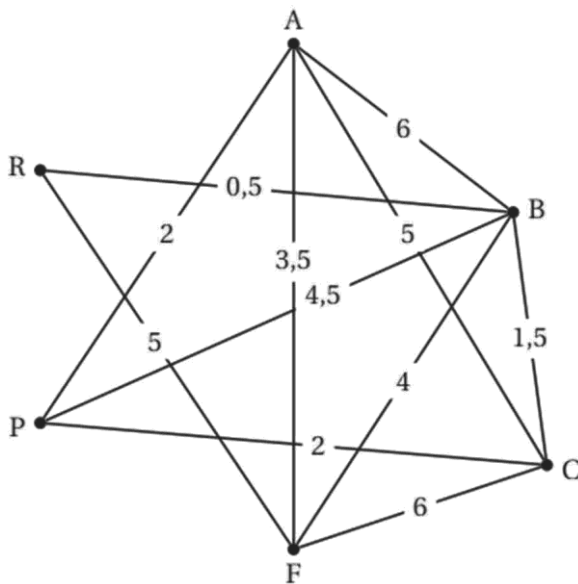
4. On admet que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 13 & 12 & 13 & 12 & 11 & 8 \\ 11 & 13 & 10 & 12 & 10 & 5 \\ 12 & 12 & 12 & 8 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Combien de parcours peut-on envisager d'Alexanderplatz au Reichstag passant par exactement 3 rues ? Justifier la réponse.

5. L'organisatrice veut également prévoir un autre parcours pour les coureurs moins expérimentés. Ce parcours doit débuter à Alexanderplatz et se terminer au Reichstag.

Les distances entre les différents lieux sont indiquées en kilomètres sur le graphe ci-dessous.



Déterminer le parcours le plus court possible d'Alexanderplatz au Reichstag. Donner sa longueur.

# Partie 3 : Aides et solutions

## Exercice 1

Voir DS 5

1. **Remarque :** Les élèves ne traitent pas assez souvent les questions d'informatique. Elles sont pourtant très bien valorisées aux concours et quelques fiches permettent la plupart du temps de s'en sortir.

Un programme possible :

```
from math import *  
def f(x):  
    return exp(-x) - x**2/2 + x
```

## 2. Étude de $f$

a. **Remarque :** Vous devez connaître par cœur les limites des fonctions usuelles. Certaines sont déjà dans le livret des erreurs : **Ana39** et **Ana43**. Vous pouvez vous noter les autres sur ce même livret : **Ana103**

**Aide :** Reprenez votre cours sur la fonction exponentielle.

Pour les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  de  $e^{-x}$  on peut :

- Soit poser  $X = -x$  et utiliser  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$  ou  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$
- Soit se rappeler que  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  et utiliser  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Pour les deux limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ , on trouve des formes indéterminées (A revoir ? **Ana40**). Il faut alors factoriser les termes qui forment l'indétermination par le « terme dominant ». C'est  $e^{-x}$  pour la limite en  $-\infty$  et  $x^2$  pour la limite en  $+\infty$  (car  $e^{-x}$  tend vers 0).

Pour la limite en  $-\infty$ , vous avez besoin de connaître vos croissances comparées (Voir **Ana43**).

**Résultats :** On trouve :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

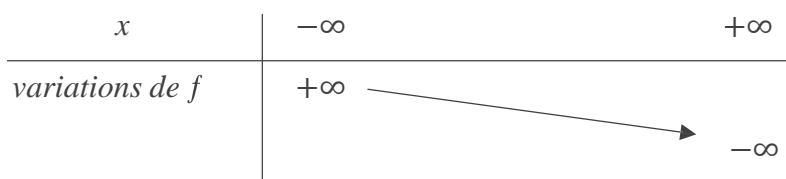
b. **Aide :** Pour les variations de  $f$  vous devez étudier le signe de  $f'$ . Pour la convexité de  $f'$  vous devez étudier le signe de  $f''$  (Voir **Ana68**). Avant de s'attaquer aux calculs des dérivées, vous devez vérifier que  $f$  est 2fois-dérivable sur  $\mathbb{R}$  (**Ana45**).

Pour la dérivabilité et la dérivée de  $x \mapsto e^{-x}$  ... voir **Ana102**.

**Résultats :**  $f'(x) = -e^{-x} - x + 1$  et  $f''(x) = e^{-x} - 1$ .

On montre successivement que :

- $f''$  est positive sur  $\mathbb{R}_-$  et négative sur  $\mathbb{R}_+$  (donc  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}_-$  et concave sur  $\mathbb{R}_+$ )
- $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc admet un maximum en 0 qui est  $f'(0) = 0$ . Donc  $f'$  est négative sur  $\mathbb{R}$ .
- $f$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .



- c.  $f(x) = x - e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x = x - e^{-x} - \frac{x^2}{2} = 0$  donc on pose  $g(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2}$

**d. Remarques :** Vous devez repérer dans l'énoncé « l'équation ... possède une unique solution ». Cela doit vous faire penser au théorème de la bijection. Nous avons néanmoins un problème pour utiliser ce théorème : il faut que le second membre (membre de droite) ne comporte pas la variable  $x$  (voir **Ana64**).

L'équivalence  $f(x) = x - g(x) = 0$  que nous venons de montrer nous permet d'affirmer que  $\alpha$  est solution de ces deux équations. L'équation  $g(x) = 0$  a un membre de droite sans la variable  $x$  donc nous pourrions appliquer le théorème du point fixe à cette équation pour trouver  $\alpha$ .

**Aides :** Comment utiliser le théorème du point fixe : **Ana64**

Pour trouver les deux entiers qui encadrent  $\alpha$ , il faut montrer que leurs images sont de signes contraires ... Comme on ne donne aucune indication sur ces entiers, il faut des « entiers simples » à trouver.

**Résultat :**  $\alpha \in [0; 1]$

### 3. Étude d'une première suite.

a. **Aide :** Avez-vous penser à une récurrence ?

Deux remarques à bien comprendre sur ce raisonnement : voir **G3** et **G4**

b. **Aides :** On peut écrire cette inégalité sans valeur absolue, avec un encadrement ... voir **G15**

Rappelez vous que  $f'$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

c. **Aide :** Cela doit vous faire penser à une propriété... (voir **Ana70**). Soyez très méticuleux sur les conditions à vérifier... **Un conseil : Faites vous une fiche avec cette méthode !**

d. **Aide :** Encore une récurrence !

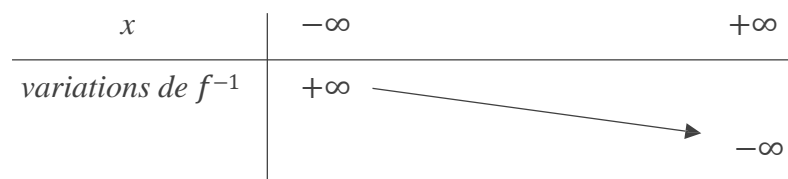
e. **Aides :**

- Il faut utiliser le théorème d'encadrement. Il nous donne un encadrement ...
- De plus il nous faut la limite de  $\frac{1}{n}$  (Voir **Ana5**)  
( $e$ ) ...

**Résultat :**  $(u_n)$  tend vers le point fixe  $\alpha$ .

### 4. Étude d'une seconde suite

a. **Aide :** Pour qu'une fonction soit bijective sur un intervalle, il faut et il suffit qu'elle soit continue et strictement monotone sur cet intervalle. Elle admet alors une fonction réciproque dont on a une propriété importante ... **Ana67**



b. **Aide :** La formulation de la question doit vous faire penser à celle de la question **d.** de la partie 2 ... la question suivante aussi ...

d. **Résultat :**  $f(x) = \frac{1}{n} - x = f^{-1} \left( \frac{1}{n} \right)$

e. **Résultat :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \approx 2,11$

1. Etudier séparément la continuité en 0 et la continuité sur  $]0, +\infty[$  (Voir Ana 46)

2. Pour étudier la dérivabilité en un point : voir Ana 47.

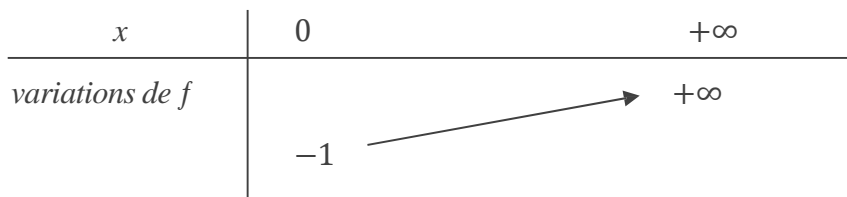
$f$  n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de  $f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. **Aide :** Pour étudier la convexité de  $f$  il faut calculer la dérivée seconde de  $f$ . Voir Ana68.

N'oubliez pas la dérivabilité (Voir Ana 45)

$$\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = 2x - 1 - \ln x \text{ et } \forall x \in ]0; +\infty[, f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

$f''(x)$  est du signe de  $2x - 1$  donc est strictement négatif sur  $]0; \frac{1}{2}[$ , est strictement positif sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$  et s'annule en  $\frac{1}{2}$ . Donc  $f$  est concave sur  $]0; \frac{1}{2}[$  et est convexe sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ .



4.  $f$  réalise une bijection (car elle est continue et strictement croissante) de  $]0; +\infty[$  vers  $J = f(]0; +\infty[) = ]-1; +\infty[$ .

5. **Aide :** Rappelez vous que  $f$  et  $f^{-1}$  ont les mêmes monotonies sur leurs ensembles de définitions respectifs ( $]0; +\infty[$  pour  $f$  et  $J$  pour  $f^{-1}$ ). (Voir Ana 67).

$f^{-1}$  est strictement croissante sur  $J$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

6.a. **Aide :** L'énoncé doit vous faire penser à une bijection. N'oubliez pas de justifier que  $k$  est dans l'ensemble d'arrivée. (Voir Ana 64).

b. **Aide :** Regardez le tableau de valeurs.  $x_0 = 1$

c.  $1,5 < x_1 < 2$  et  $2 < x_2 < 2,5$ .

d.  $x_k = f^{-1}(k)$  donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{-1}(k) = +\infty$ .

7.a. N'oubliez pas l'ensemble de dérivabilité (Ana45).  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $]0, 2[$  et strictement croissante sur  $]2, +\infty[$ .

c.  $\varphi''(x) = \frac{4-x}{x^3} > 0$  sur  $[\frac{3}{2}; 2]$  donc  $\varphi'$  est strictement croissante sur  $[\frac{3}{2}; 2]$ .

Rappelez-vous alors que  $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9} - -\frac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq \frac{2}{9}$  (Voir G15)

e. **Aide :** Le deuxième encadrement utilise l'inégalité des accroissements finis (voir Ana70). Les deux autres s'obtiennent par récurrence.

f. **Aides :**

- Il faut utiliser le théorème d'encadrement. Il nous donne un encadrement ...

- De plus il nous faut la limite de  $\left(\frac{2}{9}\right)^n$  ... (Voir Ana5)

$(u_n)$  tend vers  $x_1$ .



a.  $I_0 = \int_1^e 1 dx = \dots = e - 1$

b. Il faut penser à une I.P.P. Il y a des conditions à vérifier pour utiliser cette propriété ... **Ana 80**

c. **Aide :** Pour étudier la monotonie de  $(I_n)$ , on va étudier le signe de  $I_{n+1} - I_n$ . La linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e (\ln(x))^{n+1} - (\ln(x))^n dx = \int_1^e (\ln(x))^n (\ln(x) - 1) dx.$$

On est alors ramené à la une problématique très classique : comment trouver le signe d'une intégrale ?

Voir **Ana 77**. On utilisera cette même méthode pour prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$ .

d. **Aides :** Commencer par montrer que  $nI_n = e - I_n - I_{n+1}$  puis utiliser la positivité de  $(I_n)$ . Pour la limite de  $(I_n)$ , commencer par trouver un encadrement de  $I_n$  à l'aide des questions c. et d. Un théorème « classique » doit vous permettre de montrer que  $(I_n)$  converge vers 0.

## Exercice 4

A. 1. Voir la première colonne de **Alg 32**.

2. a.

Montrez tout d'abord que la famille est libre puis utilisez un critère de dimension : voir **Alg 22 et 23**.

b. Les vecteurs de la base canonique de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  sont  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Les coordonnées de  $e_1$  dans la base  $(u, v, w)$ , sont 3 réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$e_1 = au + bv + cw.$$

On procède alors par équivalences :  $e_1 = au + bv + cw - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dots$

On écrira alors : «  $e_1$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  dans la base  $(u, v, w)$ . »

On trouve :  $e_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans la base  $(u, v, w)$ .

c. Même méthode ...  $t$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$  dans la base  $(u, v, w)$ .

B.1. Vous devez connaître :

- les dimensions de  $M_{2,1}(\mathbb{R})$  et  $M_{3,1}(\mathbb{R})$
- le théorème du rang (**Alg 40**)
- la propriété :

«  $f$  est surjective -  $rg(f)$  est égal à la dimension de l'ensemble d'arrivée »

Ici  $f$  ne peut pas être surjective.

2. a. Rappelez-vous qu'un endomorphisme est une application linéaire qui a le même ensemble de départ et d'arrivée (**Alg 31**). On peut alors s'aider de la référence **Alg 32** (deuxième colonne).

b. On se rappelle :  $u \in \text{Ker}(f) - f(u) = 0$

Donc, si on pose  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on peut écrire :

$$u \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x+y-3z \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -y \end{cases} \Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui se note :  $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est donc une base de  $\text{Ker}(f)$

Remarque : on peut prendre pour base tout autre vecteur colinéaire à  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

A retenir :  $f$  est injective -  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  . Ce n'est visiblement pas le cas ici.

c. On peut s'aider de **Alg 36** et de la propriété vue un peu plus haut dans la question 1.

Remarque importante : Dans le cas d'endomorphisme (ce sera le cas dans la majorité des sujets de concours) on a l'équivalence :

**$f$  est injective -  $f$  est surjective -  $f$  est bijective -  $\text{Mat}(f)$  est inversible**

D'autres équivalences sont à apprendre : voir **Alg 39**

e. Regardez l'équivalence ci-dessus.

f.

## Exercice 5

Voir DS 5

### 1. Questions préliminaires

a. **Aide** : Si on trouve une matrice  $B$  qui vérifie  $AB = BA = I$  alors  $B = A^{-1}$  (attention à une erreur classique : **Alg6**).

**Résultat** :  $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I)$

**Attention** : N'écrivez pas  $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8)$ . On ne peut pas ajouter le nombre 8 aux autres matrices.

b. **Aide** : On ne sait pas trouver les racines d'un polynôme du troisième degré, sauf si c'est une « racine évidente ». Il faut donc trouver un nombre entier compris entre  $-2$  et  $2$  qui annule ce polynôme...

Lorsque vous aurez trouvé cette racine évidente il faut se rappeler une propriété : si  $\alpha$  est une racine d'un polynôme  $P$  alors on peut factoriser  $P(x)$  par  $(x - \alpha)$ . Autrement dit on peut trouver un polynôme  $Q$  tel que  $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$ . On remarque alors que si  $P$  est de degré 3 alors  $Q$  n'est plus que de degré 2 !

Concrètement : Justifiez que  $P$  peut s'écrire sous la forme  $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$  puis trouvez le polynôme  $ax^2 + bx + c$  par l'une des deux méthodes : division de polynômes ou par identification ...

**Résultat** :  $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$  et  $x^2 - 4x + 4$  peut encore se factoriser ... (voir **G5**)

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4$  a deux racines : 1 et 2.

- c. **Aide :** Justifiez que  $(A - 2I)(A - 2I)(A - I) = 0$  puis raisonnez par l'absurde : supposons que  $A - 2I$  est inversible donc que  $(A - 2I)^{-1}$  existe alors ...vous devez obtenir une contradiction avec une information donnée dans l'énoncé. Vous pourrez alors conclure que  $(A - 2I)$  n'est pas inversible.
- d. L'équation  $(A - 2I)X = 0$  a une infinité de solutions. Ces solutions s'appellent **des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 2.**

3. On résout :  $AX = X - \dots - X = x(1)$  donc l'équation a pour ensemble de solutions

$$\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \text{ On pose donc } U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Remarque :**  $AX = X - AX - X = 0 - (A - I)X = 0$ . Comme à la question 1.d. on a trouvé une infinité de solution : **les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1.**

4. On calcule ...  $AU_2 = \dots = 2U_2$ . On dira que  $U_2$  est un vecteur propre de A associés à la valeur propre 2.

5. On pose  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et on résout :  $AX = 2X + U_2 - \dots - X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Donc  $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

6. a. Cette méthode (méthode de Gauss) doit être bien comprise. Entraînez-vous.

**Résultat :**  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

N'oubliez pas que vous pouvez vous vérifier :  $PP^{-1} = I$  (Voir Alg51)

b. **Résultat :**  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c. **Aide :** Avez-vous penser à une récurrence ?

Deux remarques à bien comprendre sur ce raisonnement : voir G3 et G4

e. **Aide :** On peut formuler la question autrement : « Montrer que  $T - N$  est une matrice diagonale qu'on appellera  $D$  ».

f. **Aide :** Un petit rappel sur la formule du binôme ? (Voir Alg12)

g. **Aide :** On demande de calculer  $A^n$  à l'aide de la formule  $A^n = PT^nP^{-1}$ .

J'ai trouvé (A vérifier ...) :

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 + 2^n(n-3) & -4 + 2^{n-1}(8-3n) & 1 + 2^{n-1}(n-2) \\ 4 + 2^{n+1}(n-2) & -4 + 2^n(5-3n) & 1 + 2^n(n-1) \\ 4 + 2^{n+2}(n-1) & -4 + 2^{n+1}(2-3n) & 1 + n2^{n+1} \end{pmatrix}$$

## Exercice 6

Voir DS 6

Une remarque générale sur les variables aléatoires discrètes. Il y a peu de propriétés, de connaissances à avoir sur ces exercices donc beaucoup de questions sont accessibles quel que soit son niveau. Par contre il convient de savoir bien écrire les relations avec les événements et les variables aléatoires. Avant de commencer ces exercices, je vous invite à bien lire les propriétés Pr1 à Pr5, Pr7, Pr8, Pr10 ainsi que les lois usuelles : Pr19 à Pr24 du « livret des oublis et erreurs » qu'on vous a distribué.

### Première partie

1. a.  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(2; p)$ .

**Remarque :** Vous devez savoir reconnaître et justifier les lois de Bernoulli, binomiales, géométriques et uniformes. Faites vous des fiches avec les rédactions que vous avez vues en première année. Il faut traiter rapidement et parfaitement ces « questions de cours ».

b. **Aide :** Voir Pr21

On trouve :  $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, P(X = k) = \binom{2}{k} p^k q^{2-k}$  avec  $q = 1 - p$

Donc  $P(X = 1) = 2pq$ .

**Remarque :** Si vous avez du mal avec les coefficients binomiaux ... **G11**

2. a. **Aide :** Ce n'est pas une question de mathématiques mais de compréhension de l'énoncé ... La probabilité d'un succès est  $P(X = 1)$  donc  $2pq$ .

3. a. **Aide :** Ici encore, on vous demande de bien comprendre l'énoncé.

On trouve  $N = 6$

b. **Aide :** Vous devez repérer une loi usuelle ... Voir **Pr22**

$N$  suit la loi géométrique  $\tilde{G}(2pq)$ .

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = (1 - 2pq)^{k-1} 2pq$  avec  $q = 1 - p$

c. Donc  $N$  admet une espérance et une variance :

$$E(N) = \frac{1}{2pq} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1 - 2pq}{(2pq)^2}$$

4. a. **Remarque :** La notation  $PF$  est bien comprise mais la notation habituelle à utiliser dans les sujets pour exprimer « obtenir *Pile* au premier lancer puis *Face* au second) ». Il faudrait l'écrire  $P_1 \cap F_2$ .

La probabilité que Alice gagne la première manche est :

$P(P_1 \cap F_2) = P(P_1) \times P(F_2)$  car les événements  $P_1$  et  $F_2$  sont indépendants (Voir **Pr5**)

Donc la probabilité que Alice gagne la première manche est  $pq = p(1 - p)$ .

b. Pour qu'Alice gagne à la seconde manche, il faut que personne ne gagne la première (il faut donc  $PP$  ou  $FF$ ) et qu'elle gagne la seconde. On peut l'écrire :  $[(P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)] \cap (P_1 \cap F_2)$ .

Donc la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche est :

$P[(P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)] \times P(P_1 \cap F_2)$  car les deux manches sont indépendantes

$= [P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2)] \times P(P_1 \cap F_2)$  car les événements  $(P_1 \cap P_2)$  et  $(F_1 \cap F_2)$  sont incompatibles (ne peuvent pas se produire en même temps) (Voir **Pr4**)

$= [P(P_1) \times P(P_2) + P(F_1) \times P(F_2)] \times P(P_1) \times P(F_2)$  car les lancers sont indépendants  
 $= (p^2 + (1 - p)^2)p(1 - p)$

c. **Aide :** A l'aide d'un raisonnement ou d'un calcul identique à celui qu'on a fait à la question précédente, vous devez montrer que la probabilité que Bob gagne la première ou la seconde manche est identique à celles d'Alice (il faut échanger les lettres  $p$  et  $q$ ).

## Deuxième partie

5. Les sujets proposés aux concours font de plus en plus appel aux questions d'informatique. Je n'ose vous conseiller de faire des efforts pour traiter ces questions.

Dans ce programme, on va faire 3 fois une boucle *for*. Cela correspond à nos 3 lancers. Pour simuler l'obtention d'un *Pile* on utilise la commande *rd.random()* qui renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Si ce nombre est inférieur à un nombre  $p$  alors un événement de probabilité  $p$  est intervenu. Pour notre exercice cette condition (*rd.random()* < 1/2) est écrite en 2 lignes (lignes 5 et 6) et simule l'obtention d'un *Pile*. Lorsque cette condition est réalisée, le nombre de *Pile* augmente d'une unité. C'est ce qu'il fallait écrire en ligne 7 :  $S = S + 1$ .

6.  $S$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(3; 1/2)$ .  $E(S) = 3/2$  (Rappel de la formule : **Pr21**)

7. **Aide :** Ici encore, on vous demande de réfléchir ... aucune connaissance n'est utile.

$T$  peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3. Cela peut se noter :  $T(\Omega) = \llbracket 0; 4 \rrbracket$ .

8.  $((S = 2) \cap (T = 1)) = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$

Puisque les événements  $(P_1 \cap P_2 \cap F_3)$  et  $(P_1 \cap F_2 \cap P_3)$  sont incompatibles (Voir **Pr4**) alors

$$P((S = 2) \cap (T = 1)) = P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\ = P(P_1)P(P_2)P(F_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)$$

car les lancers sont indépendants,

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \dots = \frac{1}{4}$$

## Exercice 7 (EDHEC 2017)

Une remarque générale sur les variables aléatoires discrètes. Il y a peu de propriétés, de connaissances à avoir sur ces exercices donc beaucoup de questions sont accessibles quel que soit son niveau. Par contre il convient de savoir bien écrire les relations avec les événements et les variables aléatoires. Avant de commencer ces exercices, je vous invite à bien lire les propriétés **Pr1** à **Pr5**, **Pr7**, **Pr8**, **Pr10** ainsi que les lois usuelles : **Pr19** à **Pr24** du « livret des oublis et erreurs » qu'on vous a distribué.

### Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

1. Tout est dans l'énoncé :

$$P(X_1 = 1) = 0 \text{ et } P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = P(X_1 = 4) = \frac{1}{3}$$

Un peu d'aide pour calculer  $E(X_1)$  ? : voir **Pr10**

On trouve :  $E(X_1) = 3$

2. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $X_n(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket$

3. **Rappels :**

- Pour la formule des probabilités totales il vous faut un système complet d'événements (**Pr7**)
- En donnant toutes ses valeurs à une variable aléatoire discrète, on obtient un système complet d'événements (**Pr3**)

**Aide :** Les probabilités conditionnelles suivantes se déduisent de l'énoncé :

$$P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = 0, \quad P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=4}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}$$

a. Cela paraît trop simple mais il n'y a pas de piège :

«  $((X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4))$  est un système complet d'événements » est la seule justification à donner.

d. **Aide :** Posez  $u_n = P(X_n = 1)$ . On obtient alors une suite connue (voir **Ana11**).

**Remarque :** on peut également le montrer par récurrence.

4.b.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}[1 - P(X_n = 2)] = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}$$

c. Même méthode que pour la question 3.d.

6. **Aide :** voir **Pr10**

### Partie 2 : étude des puissances d'une matrice A

7.c.  $U_0 = (P(X_0 = 1) \ P(X_0 = 2) \ P(X_0 = 3) \ P(X_0 = 4)) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$

La première ligne de  $A^n$  est  $(P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3) \ P(X_n = 4))$  soit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}) & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}) & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}) & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix}$$

### Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

9.

$$A = \frac{1}{3} [J - I] = -\frac{1}{3} I + \frac{1}{3} J \text{ donc : } a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{1}{3}$$

10.a.  $J^2 = 4J$  puis on montre par récurrence : pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :

$$J^k = 4^{k-1}J.$$

b. N'oubliez pas de montrer que les matrices commutent ...

**Aide :** **Alg12**

Pour tout entier  $n$  non nul on a :

$$\begin{aligned}
 A^n &= \left(-\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J\right)^n = \left(\frac{1}{3}J - \frac{1}{3}I\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}J\right)^k \left(-\frac{1}{3}I\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k J^k \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} I^{n-k} \\
 &= \dots = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \left(\frac{1}{3}\right)^n J \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} (-1)^{n-k}
 \end{aligned}$$

On utilise alors encore la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} = (4 + (-1))^n = 3^n$$

On trouve, après des calculs ...

$$\forall n > 0, \quad A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] J$$

## Exercice 8 (d'après ESTP ECT 2013)

1. **Aide :** La fonction  $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax}$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto e^{ax}$ . Voir **Ana 75**.

$$u_0 = \frac{1}{3} \left[1 - e^{-3}\right].$$

2. **a. Aide :** Lorsque vous souhaitez démontrer une inégalité avec des intégrales il faut en premier lieu penser à trouver une inégalité impliquant la fonction qui est sous l'intégrale. Ensuite il faut intégrer en respectant l'ordre croissant des bornes. Commencez donc par trouver le signe de  $f_n(x)$  pour tout  $x$  de  $[0,1]$ . Voir **Ana 77**.

**b. Aide :** Pour étudier la monotonie de  $(u_n)$ , on va étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ . La linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx - \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x) dx = \dots = \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-3x} dx.$$

On est alors ramené à la même problématique que celle de la question précédente : comment trouver le signe d'une intégrale ? Voir **Ana 77**.

**c. Aide :** Il y a une propriété du cours sur les suites qui vous permet de conclure à partir des deux questions précédentes. Voir **Ana 3**.

**Attention :** Cette propriété ne permet pas de donner la limite de la suite mais seulement qu'elle converge !!!

3. **a.** Encore une inégalité avec une intégrale !

Ici c'est la fonction  $f_n$  qui est sous l'intégrale. Cette fonction  $f_n$  étant le produit des deux fonctions  $u : x \mapsto (1-x)^n$  et  $v : x \mapsto e^{-3x}$  ... voir **Ana 77**.

**b. Attention :** Pour utiliser le théorème d'encadrement il faut un encadrement pas seulement une inégalité.  $(u_n)$  tend vers 0.

4. **a. Aide :**  $(u^n)' = nu^{n-1}u'$  donc  $(u^{n+1})' = (n+1)u^n u'$ . Voir **Ana 102**.

**b. Aide :** La relation de la question 4.a. peut s'écrire aussi, après quelques calculs :

$$nu_n = 1 - 3u_{n+1} - u_n$$

Si  $u_n$  tend vers une certaine limite, il en va de même de  $u_{n+1}$ .

$nu_n$  tend vers 1.

5.a. **Aide :** Ecrire  $e^{-3}$  sous la forme d'une somme d'une série exponentielle. Voir **Ana 18**.

$v_n$  tend vers 0.

**b. Aide :** Une récurrence devrait faire l'affaire. Vous aurez besoin de trouver une relation entre  $v_n$  et  $v_{n+1}$

### Partie A

1. **Attention :** Ce n'est pas une « croissances comparées ». Voir **Ana43**.

On trouve :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

2. **Aides :**

- Il faut évidemment calculer la dérivée de  $g$  mais n'oubliez pas l'ensemble de dérivabilité ! Voir **Ana 45**

- On doit utiliser la dérivée de  $u \times v$  (voir **Ana 102**) mais attention :  $v(x) \in e^x - 2$

On trouve :  $g'(x) = (-x + 1)e^x$ .

- On montre que  $g$  est croissante sur  $[0 ; 1]$  et décroissante sur  $[1 ; +\infty[$ . Et  $g(0) = 0$ .

**Remarque :** Ce n'est pas beaucoup plus long de faire le tableau de variations mais ce n'est pas demandé.

3. **Aide :** Cela doit vous faire penser à une bijection. Voir **Ana 64**.

4.  $g$  est positive sur  $[0 ; \alpha]$  et est négative sur  $[\alpha ; +\infty[$ .

### Partie B

1. **Aides :**

- **Attention :** ce n'est pas une fonction rationnelle car  $e^x$  n'est pas un polynôme.
- Vous devez utiliser la continuité d'une fonction de la forme  $\frac{u}{v}$ . Voir **Ana 102**.
- Avez-vous pensé à montrer que le dénominateur ne s'annule jamais sur  $]0 ; +\infty[$  ? Voir **Ana 50**

2. **Aides :**

- Vous devez trouver une fonction qui est égale à  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  et dont on donnera une valeur en 0. Quelle valeur ? La limite de  $f$  en 0 évidemment pour que cette nouvelle fonction soit continue en 0 ?
- Comment montre-t-on qu'une fonction est continue en 0 ? Voir **Ana 46**
- Comment calcule-t-on la limite de  $f$  en 0 ? Voir **Ana 39**

3. **Aide :** Factorisez le dénominateur par  $e^x$  puis utilisez une « croissances comparées » Voir **Ana 43**

On trouve :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4. **Aide :** Vous trouverez toutes les « dérivées classiques » en **Ana 102**. Prenez le temps pour calculer les dérivées sans vous tromper. Beaucoup de questions dépendent de leurs résultats !!!

5. **Aide :** Utilisez le résultat de la question 4. de la **partie A**.

On obtient :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
Variations de $f$	0	$f(\alpha)$	0

6. **Aides :**

- Vous ne savez qu'une seule chose sur  $\alpha$  : vous savez que  $g(\alpha) = 0$ . On doit donc forcément s'en servir !
- L'expression  $f(\alpha)$  qui nous est proposée ( $\alpha(2 - \alpha)$ ) ne contient pas  $e^\alpha$ . Il faut donc qu'on exprime  $e^\alpha$  à l'aide de  $\alpha$  et nous ne connaissons qu'une seule chose sur  $\alpha$  :  $g(\alpha) = 0$ .

**Remarque :** Lorsque vous avez un peu de temps, n'hésitez pas à chercher longtemps des questions qui vous paraissent difficiles. Cela vous permet de gagner de la confiance. C'est important la confiance ! (Voir conseil n°7 en fin de ce livret)

## Partie C

1.  $u_1 = \frac{1}{e-1}$
2. **Aide :** Avez-vous penser à un raisonnement par récurrence ? Pour l'hérédité vous devez utiliser la monotonie de  $f$  sur  $]0; 1[$ . Voir **Ana 23**.
3. **Aide :** Peut-être moins simple à voir que la question précédente car on ne voit pas comment intervient  $n$  mais ici encore on utilise un raisonnement par récurrence : on doit montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_{n+1} \leq u_n$ .
4. **Aide :** Pas si simple. On peut utiliser le théorème du point fixe (voir **Ana 13**). Cela nous ramène à trouver les solutions de l'équation  $f(x) = x$ . L'équation  $f(x) = x$  a une solution évidente : le nombre 0. On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation. On peut le faire en plusieurs étapes :
  - a. Montrer que dans  $]0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = x$  équivaut à l'équation  $e^x - x - 1 = 0$ .
  - b. Etudier les variations de la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = e^x - x - 1$ .
  - c. En déduire que l'équation  $f(x) = x$  n'a pas de solution dans  $]0; +\infty[$ .

On peut alors conclure que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

5. Les sujets proposés aux concours font de plus en plus appel aux questions d'informatique. Je n'ose vous conseiller de faire des efforts pour traiter ces questions.

Ici on a une « boucle *while* » très classique. On peut proposer :

```
from math import *
u = 1
n = 0
while u > 0.001 :
    u = u ** 2 / (exp(u) - 1)
    n = n + 1
print(n)
```

### Exercice 10 (d'après EML 2018)

#### Partie I : Étude de la fonction $f$

##### 5. Aides :

- Il est nécessaire de connaître les limites de la fonction  $\ln$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$   
A se noter : **Ana 104**
- La limite en  $+\infty$  conduit à une forme indéterminée (voir **Ana 40**) que l'on peut « lever » en factorisant  $f(x)$  par  $x$  puis en utilisant les « croissances comparées » (Voir **Ana 43**).

**Attention :** Pour obtenir les variations de  $f$  il faut calculer sa dérivée. N'oubliez pas de mentionner l'ensemble dérivabilité avant de calculer  $f'(x)$ .  
A se noter : **Ana 45**

**Résultats :**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $D_{f'} = \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\forall x > 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x) \geq 0 \iff x \geq 1$	0	1	$+\infty$
Variations de $f$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		1	$+\infty$

6. **Aide :** Vous devez penser au théorème de la bijection (Rappel : voir **Ana64**). Ici vous l'appliquez 2 fois. Il y a une solution,  $a$ , sur  $]0; 1[$  et une autre,  $b$ , sur  $]1; +\infty[$ .
7. **Aide :** Calculez  $f(2)$  et  $f(4)$  et comparez les résultats à 2.



De l'encadrement  $f(2) < f(b) < f(4)$  on déduit :  $2 < b < 4$ . Pour la justification, voir **Ana23** et **Ana67**.

## Partie II : Étude d'une suite

### 1. Aides :

- Pour passer d'un terme  $u_n$  au suivant  $u_{n+1}$  il faut appliquer la fonction logarithme (puis ajouter 2). Le problème c'est qu'on ne peut pas appliquer la fonction logarithme à n'importe quel nombre ... Il faut que  $u_n$  soit strictement positif ! Cela ne devrait pas poser trop de problème si vous montrez que tous les termes de la suite appartiennent à  $[b ; +\infty[$  car  $b$  est strictement positif. Voir **Ana 10**.
- On établit le résultat en procédant par récurrence.

**Attention au raisonnement par récurrence :** Voir **G3** et **G4**.

### 2. Aides :

- Une méthode classique consiste à calculer  $u_{n+1} - u_n$  c'est-à-dire  $\ln(u_n) + 2 - u_n$ .
- C'est alors qu'on peut se demander pourquoi on nous fait étudier une suite dans une partie 2 après avoir étudié une fonction dans la partie 1... Que vaut  $f(u_n)$  ?
- Vous aurez également besoin de montrer que si  $u_n \geq b$  alors  $f(u_n) \geq 2$  (Voir **Ana23**)

**Résultat :** On montre que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, et comme on a montré dans la question 1. qu'elle est minorée par  $b$ , elle converge. Attention : Pour le moment on ne connaît pas la limite de la suite. On ne peut pas affirmer (pas encore en tout cas ...) qu'elle converge vers  $b$  (Voir **Ana3**). Il nous faut un autre outil très classique ....(Voir **Ana13**).

### 3.a. Aides :

- Vous apprendrez à voir dans cette question (si ce n'est pas encore le cas !) une inégalité des accroissements finis (IAF). Les conditions d'utilisation de cette méthode sont souvent mal connues (Voir **Ana70**).
- L'intervalle sur lequel on va appliquer l'IAF est  $[b ; +\infty[$ .  
La fonction qu'on utilise est  $g : x \rightarrow \ln(x) + 2$  car  $u_{n+1} = g(u_n)$ .  
Vous devez donc prouver que  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$  sur  $[b ; +\infty[$ . Pourquoi  $\frac{1}{2}$  ? C'est l'inégalité demandée qui nous le montre ...

**Remarque :** Je pense qu'il serait utile de vous faire une fiche avec la méthode de l'IAF en y mettant un exemple. Cette méthode n'est pas simple mais tous les exercices sont faits sur le même modèle. Il suffit à peu de choses près d'un « copier-coller » à faire à chaque nouvel exercice utilisant l'IAF.

**b. Aide :** Il faut faire une récurrence et se servir de la question précédente.

**8. a. Remarque :** Les élèves ne traitent pas assez souvent les questions d'informatique. Elles sont pourtant très bien valorisées aux concours et quelques fiches permettent la plupart du temps de s'en sortir.

Un programme possible :

```
from math import *  
  
def suite (n) :  
    u = 4    # on initialise u avec u0  
    for i in range (1, n + 1) :  
        u = log(u) + 2    # on passe de u_n à u_{n+1}  
    return u
```

**b. Aide :** Le résultat de la question 3.b. nous montre que l'écart entre  $u_n$  et  $b$  est inférieur à  $\frac{1}{2^{n-1}}$ . Donc si  $\frac{1}{2^{n-1}}$  est inférieur à epsilon alors  $u_n$  sera une valeur approchée de  $b$  à epsilon près.

Ainsi nous pouvons proposer le programme suivant :

```

6. def valeur _ approchee(epsilon) :
7.     n = 0
8.     while 1/2 ** (n - 1) > epsilon :
9.         n = n + 1
10.    return suite(n)

```

### Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

#### 1. Aides :

- $\Phi$  est une fonction définie par une intégrale. Un petit rappel sur ces fonctions ? : Voir **Ana 79**.
- $\Phi'(x) = 2 \frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$

- $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$

A se noter ?.. **Ana37**.

2. Aide : On a montré précédemment que  $f$  a pour minimum 1 donc elle est toujours positive. Cela vous donne le signe du dénominateur de  $\Phi'(x)$ .

Résultat :  $\Phi$  est croissante sur  $]0; 2]$  et décroissante sur  $[2; +\infty[$ .

Remarque : On ne vous demande pas le tableau de variations de  $\Phi$  donc vous n'avez pas besoin de calculer les limites et extrêmes de  $\Phi$ .

#### 3. Aides :

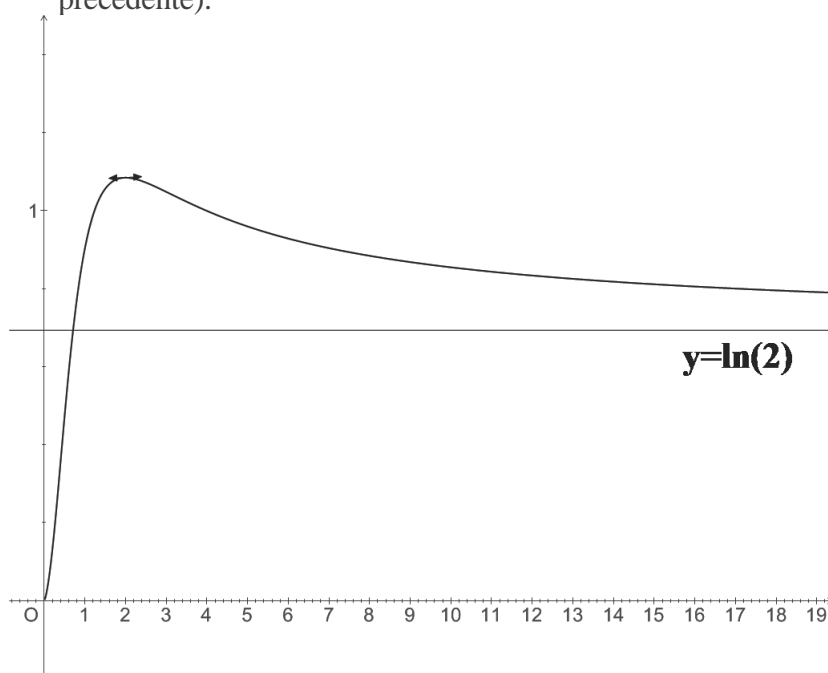
- $\Phi(x)$  est une intégrale. Vous devez donc prouver des inégalités avec des intégrales. La méthode est générale : vous devez commencer par trouver des inégalités avec la fonction qui est sous l'intégrale (on parle d'intégrande) sur l'intervalle sur lequel vous intégrez (ici c'est  $[x; 2x]$ ). Voir **Ana 77**.
- Commencez par montrer que sur  $[x; 2x]$  on a :

$$0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$$

Remarque : N'oubliez pas de préciser que vous intégrez dans l'ordre croissant des bornes.

A se noter : **Ana78**

4.  $\Phi(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x)$  (on utilise le théorème d'encadrement avec l'encadrement trouvé à la question précédente).



## Exercice 11 (d'après EML 2000)

1. En regardant la deuxième question, il semble intéressant de montrer tout de suite que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]-1; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ . On en déduira que  $f$  est de classe  $C^0$  (c'est-à-dire que  $f$  est continue) sur  $]-1; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .  
Voir méthode **Ana 102**

Pour cela **attention à l'erreur** très fréquente :

« Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  alors  $\frac{f}{g}$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  ».

Il manque la condition : «  $g$  ne s'annule jamais sur l'intervalle  $I$  ».

A se noter : **Ana 50**

### Rappels:

- $\ln(u)$  est de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  - {  $\begin{matrix} u > 0 \text{ sur } I \\ u \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \end{matrix}$  } Voir **Ana 51 et 102**
- Pour la continuité en 0 voir **Ana 46**

2.  $\forall x \in ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[ , f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$

3. C'est une méthode classique donc elle n'est pas guidée. Il faut la connaître : Voir : **Ana 63**

On montre que  $f$  est strictement décroissante sur  $]-1; +\infty[$ .

- Puisque  $\lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x = 0^+$  et  $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

- Pour la limite en  $+\infty$ , on peut penser à une factorisation pour faire apparaître une « croissance comparée » :  $\forall x \in ]-1; +\infty[ ,$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln\left(x \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x}.$$

### A propos des « croissances comparées » :

N'utilisez pas les « croissances comparées » n'importe comment.

Les limites utilisant les croissances comparées des fonctions polynomiales,  $\ln$  et  $\exp$  ne s'utilisent que dans des cas particuliers. On pourra remarquer que ces limites ne sont données :

- qu'aux bornes des ensembles de définition des fonctions  $\ln$  et  $\exp$ .
- que dans des cas de produits ou quotients des fonctions  $\ln$  ou  $\exp$  avec la fonction  $x \rightarrow x^n$  qui conduisent à des formes indéterminées.

Voir **Ana 43**

4. **Aide :** Vous devez prouver que  $f$  est continue sur  $[x; 2x]$  si  $x \geq 0$  ou  $[2x; x]$  si  $x < 0$  (il faut différencier deux cas car nous savons tous que  $2x$  est plus petit que  $x$  si  $x$  est négatif !).

5. **Méthode à connaître :**  $F$  est une fonction définie par une intégrale.

Voir : **Ana 79**

### Comment démontrer qu'une fonction définie par une intégrale est de classe $C^1$ ?

Considérons la fonction  $F : x \rightarrow \int_x^{2x} f(t) dt$ .

1. On montre tout d'abord que  $f$  est continue sur  $]-1; +\infty[$  donc sur  $[x; 2x]$  si  $x$  est positif (et  $[2x; x]$  si  $x$  est négatif) pour tout  $x$  de  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ . Cela justifie l'existence de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. On en déduit que  $f$  admet des primitives sur tout intervalle  $[x; 2x]$  si  $x$  est positif (et  $[2x; x]$  si  $x$  est négatif). Soit  $G$  une primitive de  $f$  sur ces intervalles.  
On a donc  $G' = f$  donc, puisque  $f$  est continue sur  $[x; 2x]$  si  $x$  est positif (et  $[2x; x]$  si  $x$  est négatif) pour tout  $x$  de  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ , donc  $G$  est de classe  $C^1$  sur ces intervalles.
3. On en déduit que  $F(x) = G(2x) - G(x)$ .
4. La fonction  $x \rightarrow 2x$  est dérivable sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  et est à valeurs dans  $]-1; +\infty[$  donc, puisque la fonction  $G$  est dérivable sur  $]-1; +\infty[$ , la fonction  $x \rightarrow G(2x)$  est dérivable sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ .

Donc  $F$  est dérivable sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  comme différence de deux fonctions qui le sont.

$$\forall x \in ]-\frac{1}{2}; +\infty[ \setminus \{0\},$$

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2 \frac{\ln(1+2x)}{1+2x} - \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$\text{donc } F'(x) = \frac{\ln(1+2x)}{1+2x} - \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{\ln(1+2x) - \ln(1+x)}{1+2x} = \frac{\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)}{1+2x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{1+x}\right)}{1+2x}.$$

- Montrez alors séparément que sur  $]-\frac{1}{2}; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ ,  $F'(x)$  est positif.

**b. Une méthode à connaître :** Lorsque vous souhaitez démontrer une inégalité avec des intégrales il faut en premier lieu penser à trouver une inégalité impliquant la fonction qui est sous l'intégrale. Ensuite il faut intégrer en respectant l'ordre croissant des bornes.

En utilisant la monotonie de  $f$  montrez successivement que  $f(t) \geq f(2x)$  pour tout  $t$  de  $[x; 2x]$  puis intégrer entre  $x$  et  $2x$  dans l'ordre croissant des bornes.

A se noter : **Ana 77**

**c.**  $F(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice 12 (D'après ECRICOME 2019)

1. Un petit rappel sur la parité d'une fonction ? Voir **Ana 36**

2. Aides :

- Il faut calculer  $\int_1^A f(t) dt$  pour un réel  $A$  supérieur à 1 puis faire tendre  $A$  vers  $+\infty$ .
- Pour trouver une primitive de  $t \square \frac{1}{t^n}$ , deux possibilités :

$$\text{➤ On apprend que c'est } t \square - \frac{1}{(n-1)t^{n-1}}$$

➤ On écrit que  $\frac{1}{t^n} = t^{-n}$  puis on utilise la formule d'une primitive  $t \rightarrow \frac{t^{m+1}}{m+1}$  de  $t \rightarrow t^m$  qui reste valable si  $m < -1$ .

On trouve :  $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{2}$  (cela justifie la convergence car cette intégrale sa valeur est finie)

3. a. Aide : Sans grande imagination il faut poser :  $u = -t$ . Attention tout de même de bien préciser les conditions d'utilisation d'un changement de variables : A voir et à se noter **Ana 80**

On trouve :  $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt = \frac{1}{2}$

b. Aide : Vous devez bien connaître les 3 propriétés à prouver : A voir et à se noter **Pr 13**

4. a. Aide : Ici encore c'est une question très classique : A voir et à se noter **Pr 15**

Remarque :  $f$  et  $F_X$  s'expriment sur les 3 mêmes intervalles. Il en sera toujours ainsi.

b. Aides :

- Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité ? A voir et à se noter **Pr 11**
- Montrer que si  $f$  est paire alors  $x \rightarrow xf(x)$  est impaire. Vous avez alors une propriété intéressante sur les intégrales.

c. Aide : A voir et à se noter **Pr 11**

## Exercice 13 (ECRICOME T 2017)

Remarque générale : Les lois qui sont dans cet exercice doivent être connues et reconnues. C'est le bon moment pour vous faire des fiches. Pour chaque loi vous devez connaître le support  $(X(\Omega))$ , les probabilités  $P(X = k)$  pour toute valeur  $k$  de  $X(\Omega)$ , l'espérance et la variance. Pour les lois uniformes, de Bernoulli, binomiales, et géométriques, vous devez également savoir les repérer dans un exercice et le justifier. Vous retrouver ces lois sous les références **Pr19** à **Pr24**. N'hésitez pas à lire également les deux références suivantes : **Pr28** et **Pr29**.

1. a. L'événement « tirer une boule noire » est appelé « succès » ...

2. a.  $Y$  donne le rang du premier succès ...

3. a. Remarquons tout d'abord que la boule noire peut être tirée entre le premier et le quatrième tirage donc  $Z(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket$ .

Ensuite, vous aurez certainement besoin d'introduire des notations. Par exemple, si on note  $N_k$  : « la boule noire a été tirée au  $k^{\text{ième}}$  tirage » et  $B_k$  : « une boule blanche a été tirée au  $k^{\text{ième}}$  tirage » on peut écrire :  $P(Z = 1) = P(N_1) = \frac{1}{4}$ ,  $P(Z = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P(N_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

et on continue avec la formule des probabilités composées (**Pr8**) :

$$P(Z = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On termine en utilisant le système complet d'événements  $((Z = 1), (Z = 2), (Z = 3), (Z = 4))$  :

$$P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) = 1 \text{ donc } \dots P(Z = 4) = \frac{1}{4}$$

$Z$  suit donc la loi uniforme  $\mathcal{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket)$ .

b.  $E(Z) = 5/2$  et  $V(Z) = 5/4$

## Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

Peut-être qu'un arbre de probabilité vous aiderait à y voir plus clair ... ?

1.  $T(\Omega) = \llbracket 0; 2 \rrbracket$ .
2. Ajoutons deux notations à celles de la première partie. Soit  $U$  (respectivement  $V$ ) l'événement « on tire les deux boules dans l'urne  $U$  » (respectivement « dans l'urne  $V$  »).

$$P(T = 0) = P[(U \cap B_1 \cap B_2) \cup (V \cap B_1 \cap B_2)]$$

Les événements  $(U \cap B_1 \cap B_2)$  et  $(V \cap B_1 \cap B_2)$  étant incompatibles (revoir la signification : **Pr4**) :

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(U \cap B_1 \cap B_2) + P(V \cap B_1 \cap B_2) \\ &= P(U) \times P_U(B_1) \times P_U(B_2) + P(V) \times P_V(B_1) \times P_V(B_2) \\ &= \dots = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

On montre même que  $P(T = 2) = \frac{5}{32}$  puis on en déduit :  $P(T = 1) = \frac{7}{16}$

car la somme des probabilités est égale à 1.

$$3. E(T) = 0 \times P(T = 0) + 1 \times P(T = 1) + 2 \times P(T = 2) = \dots = \frac{3}{4}$$

$T$  ne suit pas une loi binomiale. Pour s'en convaincre, trouver les deux paramètres que devrait avoir cette loi binomiale en regardant le support puis l'espérance de  $T$ . Recalculez alors par exemple  $P(T = 0)$  pour conclure.

4.

$$P_{T=1}(U) = \frac{P(U \cap T = 1)}{P(T = 1)} = \dots = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

Il est donc plus probable d'avoir obtenu Face.

## Exercice 14

### Partie A

$$2. \underset{1}{X}(\Omega) = \underset{2}{\llbracket 1; 4 \rrbracket} = \underset{1}{R} \cap \underset{2}{B} ; \quad P(X = 2) = P(\underset{1}{R}) \times P(\underset{2}{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

3. Vous devez calculer, pour tout  $i$  de  $X(\Omega)$ , les valeurs de  $P(X = i)$ . Commencez par décrire ces événements à l'aide d'événements  $R_k$  et  $B_k$  comme à la question précédente. Vous devrez utiliser la formule des probabilités composées (Voir **Pr 8**).

On montre que  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ . (Voir **Pr 19**)

$$E(X) = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{5}{4}$$

4.  $X + Y = 4$  donc  $Y = 4 - X$  donc  $Y(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$  et pour tout  $i$  de  $Y(\Omega)$ ,  $P(Y = i) = P(4 - X = i) = P(X = 4 - i) = \frac{1}{4}$  car  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ .

On en déduit que  $Y$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0; 3 \rrbracket$ .

Pour trouver  $E(Y)$  et  $V(Y)$ , on utilise des formules utilisant  $E(X)$  et  $V(X)$  (Voir **Pr 29**).

$$E(Y) = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{5}{4}$$

## Partie B

1.  $Z(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ .

2.  $(Z = 2) = (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)$ . Il faut alors bien comprendre les deux étapes suivantes :

On a alors, par incompatibilité des événements  $(B_1 \cap B_2)$  et  $(R_1 \cap R_2)$  (Voir **Pr 4**) :

$$P(Z = 2) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2).$$

Puis, par indépendances des événements  $B_1$  et  $B_2$  d'une part et  $R_1$  et  $R_2$  d'autre part (car les tirages s'effectuent avec remise),  $P(Z = 2) = P(B_1) \times P(B_2) + P(R_1) \times P(R_2)$  (Voir **Pr 5**).

On termine ... 
$$P(Z = 2) = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}.$$

On fait le même travail pour  $p(Z = 3)$ . On obtient  $p(Z = 3) = \frac{3}{16}$ .

Bon, on a le droit d'être malin et de constater que les résultats obtenus sont cohérents avec les formules données dans les deux questions suivantes en remplaçant  $k$  par 1.

3. L'événement  $(Z = 2k)$  est réalisé si et seulement si on a une alternance de boules rouges et blanches jusqu'au rang  $2k - 2$  puis, sur les deux derniers tirages, on a deux boules de la même couleur. On peut l'écrire :

$$(Z = 2k) = \left[ \bigcap_{i=0}^{k-2} (B_{2i+1} \cap R_{2i+2}) \right] \cap B_{2k-1} \cap B_{2k} \cup \left[ \bigcap_{i=0}^{k-2} (R_{2i+1} \cap B_{2i+2}) \right] \cap R_{2k-1} \cap R_{2k}$$

On utilise alors les règles vues à la questions 2 sur les événements indépendants et les événements incompatibles.

4. L'événement  $(Z = 2k + 1)$  est réalisé si et seulement si on a une alternance de boules rouges et blanches jusqu'au rang  $2k$  puis, puis une répétition de la couleur obtenue au rang  $2k$ . On peut l'écrire :

$$(Z = 2k + 1) = \left[ \bigcap_{i=0}^{k-1} (B_{2i+1} \cap R_{2i+2}) \right] \cap R_{2k+1} \cup \left[ \bigcap_{i=0}^{k-1} (R_{2i+1} \cap B_{2i+2}) \right] \cap B_{2k+1}$$

On utilise alors les règles vues à la questions 2 sur les événements indépendants et les événements incompatibles.

5. On doit utiliser les résultats connus sur les séries géométriques (Voir **Ana 17**).

## Exercice 15 (HEC ECT 2006)

**1.a. Aide :** L'exercice ne donne pas beaucoup d'indications car la méthode est classique. On va appliquer la formule des probabilités totales (voir **Pr 7**) liée au système complet d'événements  $(R_n, L_n, M_n)$  pour calculer successivement  $r_{n+1} = P(R_{n+1})$ ,  $l_{n+1} = P(L_{n+1})$  et  $m_{n+1} = P(M_{n+1})$ .

**b.**  $U_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ l_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Pour le raisonnement par récurrence vous ferez attention à ne pas commettre les erreurs référencées **G3** et **G4**.

**2.a.** A savoir faire par cœur. N'hésitez pas à vous entraîner avec d'autres matrices.

N'oubliez pas de vous vérifier :  $SS^{-1} = I$ . (**Alg 51**)

Ici on a :  $S^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -4 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

**b.**  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. Puisque  $\Delta$  est une matrice diagonale, pour tout de  $IN^*$ ,

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Voir méthode **Alg 11**).

$A = S \Delta S^{-1}$  puis effectuer une récurrence. Attention aux erreurs **G3** et **G4**.

$$e. \forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 + 8(-\frac{1}{2})^n & 4 - 4(-\frac{1}{2})^n & 4 - 4(-\frac{1}{2})^n \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 - 8(-\frac{1}{2})^n & 5 + 4(-\frac{1}{2})^n & 5 + 4(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$$

$$3. a. \forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0 \text{ donc } \dots = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4} \text{ et } m_n = \frac{1}{12} (5 - 8(-\frac{1}{2})^n).$$

$$1. -1 < -\frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ (voir Ana 5) donc :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{12} \times 4 = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \frac{1}{12} \times 5 = \frac{5}{12}.$$

On peut remarquer que la somme de ces limites est bien égale à 1.

## Exercice 16 (Ecriture 2011)

2.a. **Aide :** Trouvez les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $A - \lambda I$  n'est pas inversible.

$A$  admet deux valeurs propres : 1 et 2.

b. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est  $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est  $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.a.  $\Delta X_1 = 2X_1$  ;  $\Delta X_2 = X_2$  et  $\Delta X_3 = X_3$ .

$$b. P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c. P^{-1} \Delta P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

4.c. N'oubliez pas que les matrices  $\Delta$  et  $N$  doivent commuter lorsque vous appliquez la formule du binôme de Newton à  $(\Delta + N)^n$ .

$$\text{Rappel : } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

A se noter : **Alg 12**  
A se noter : **G 11**

On obtient :  $A^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}N$ .

e.  $(\Delta^n, nN)$  est une décomposition de Dunford de la matrice  $A^n$ .



## Exercice 17

Rappelons que les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions et non des réels. Pour les différencier des équations à solutions réelles, les inconnues de ces équations différentielles sont notées  $y$  ( $y'$  et  $y''$  seront respectivement les fonctions dérivée et dérivée seconde de  $y$ ).

Rappelons également que les solutions de ces équations différentielles sont la somme d'une solution quelconque (n'importe quelle fonction qui vérifie l'équation différentielle) et des solutions de l'équation homogène associée à cette équation différentielle (équation avec le membre de droite qui est nul). Les 3 premières équations sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. Les 3 dernières sont des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

1. Pour trouver une solution particulière simple, on cherche une fonction constante. Sa fonction dérivée étant nulle, cette fonction vérifie l'équation  $3y = 6$ . C'est donc la fonction constante égale à 2. Les solutions de l'équation homogène  $y' + 3y = 0$  sont de la forme  $x \rightarrow ke^{-3x}$  où  $k$  est un réel quelconque (Voir **Ana 94**). Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :  $f(x) = ke^{-3x} + 2$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Puisque  $f(0) = -1$  alors  $ke^{-3 \times 0} + 2 = -1$  donc  $\dots k = -3$ . Ainsi  $f(x) = -3e^{-3x} + 2$

2. Les solutions de l'équation homogène  $2y' + 3y = 0$  -  $y' = -\frac{3}{2}y$   $x \rightarrow ke^{-\frac{3}{2}x}$  où  $k$  est un réel quelconque (Voir **Ana 94**). Pour trouver une solution particulière simple, on cherche une fonction polynôme degré 3. Posons  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  alors  $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

$P$  est solution de l'équation différentielle ssi  $2P'(x) + 3P(x) = 21x^3 + 6x^2 + 27x + 26$   
 $- 2(3ax^2 + 2bx + c) + 3(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 21x^3 + 6x^2 + 27x + 26$

Puis on procède par identification (résolution d'un système) et on obtient :  $a = 7, b = -12, c = 25$  et  $d = -8$

Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + 7x^3 - 12x^2 + 25x - 8$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

3. Les solutions de l'équation homogène  $y' - y = 0$  -  $y' = y$  sont de la forme  $x \rightarrow ke^x$  où  $k$  est un réel quelconque (Voir **Ana 94**). On cherche particulière  $g$  sous la forme  $P(x)e^{2x}$  où  $P$  est une fonction polynôme.  $g$  est solution de l'équation différentielle ssi  $g'(x) - g(x) = (2x + 1)e^{2x}$

$$- P'(x)e^{2x} + 2P(x)e^{2x} - P(x)e^{2x} = (2x + 1)e^{2x} - P'(x) + P(x) = 2x + 1$$

On montre alors que nécessairement  $P$  doit être de degré 1.

On peut alors choisir de poser  $P(x) = ax + b$ . On a alors  $P'(x) = a$ .

Ainsi :  $P'(x) + P(x) = 2x + 1 - a + ax + b = 2x + 1$ , donc, par identification :  $a = 2$  et  $b = -1$  donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$f(x) = ke^x + 2x - 1 \in \mathbb{R}$

4. Les équations différentielles homogènes du second ordre ne se résolvent pas comme celles du premier ordre (Voir **Ana 95**). Il faut tout d'abord rechercher les solutions de l'équation caractéristique. Ici l'équation caractéristique est :  $r^2 + 2r + 1 = 0$ . On montre facilement (après recherche du discriminant ou identité remarquable) que cette équation a une solution « double » :  $-1$ .

Ainsi les solutions de l'équation homogène  $y'' + 2y' + y = 0$  sont de la forme :  $x \rightarrow (ax + b)e^{-x}$ .

Pour trouver une solution particulière simple, on cherche une fonction constante. Ses fonctions dérivées et dérivée seconde étant nulles, cette fonction vérifie l'équation  $y = 1$ . C'est donc la fonction constante égale à 1.

Donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :  $x \rightarrow (ax + b)e^{-x} + 1$   $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

5. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique  $r^2 + 3r - 4 = 0$ . On montre facilement (après recherche du discriminant) que cette équation a deux solutions :  $-4$  et  $1$ .

Ainsi les solutions de l'équation homogène sont de la forme :  $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-4x}$  (Voir **Ana 95**).

Pour trouver une solution particulière, on cherche une fonction polynôme degré 1. Posons  $P(x) = ax + b$  alors  $P'(x) = a$  et  $P''(x) = 0$ .

$P$  est solution de l'équation différentielle ssi  $P''(x) + 3P'(x) - 4P(x) = x - 1$

$$- 0 + 3a - 4(ax + b) = x - 1$$

Puis on procède par identification (résolution d'un système) et on obtient :  $a = -1/4, b = 1/16$

Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-4x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Puisque } f(0) = \frac{17}{16} \text{ alors } \alpha + \beta + \frac{1}{16} = \frac{17}{16} \text{ donc } \alpha + \beta = 1$$

$$\text{Puisque } f'(0) = -\frac{1}{4} \text{ alors } \dots \alpha - 4\beta - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \text{ donc } \dots \alpha = \frac{4}{5} \text{ et } \beta = \frac{1}{5}.$$

Donc la solution recherchée de cette équation différentielle est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{4}{5}e^x + \frac{1}{5}e^{-4x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}$$

6. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique  $r^2 - 4 = 0$  qui a deux solutions  $-2$  et

2. Ainsi les solutions de l'équation homogène  $y'' - 4y = 0$  sont de la forme :  $x \mapsto \alpha e^{-2x} + \beta e^{2x}$ . (Voir **Ana 95**).

• Recherchons une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' - 4y = e^x$  sous la forme  $g(x) = ke^x$ . En remplaçant dans cette équation différentielle, on montre que  $k = -1/3$ .

• Recherchons une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' - 4y = x$  sous la forme  $h(x) = ax + b$ . En remplaçant dans cette équation différentielle, on montre que  $a = -1/4$  et  $b = 0$ .

La méthode de superposition des solutions (**Ana 93**) nous permet d'affirmer que la somme des deux solutions particulières que nous venons de trouver ( $x \mapsto g(x) + h(x)$ ) est une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' - 4y = e^x + x$

Nous pouvons conclure : l'ensemble des solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$x \mapsto \alpha e^{-2x} + \beta e^{2x} - \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{4}x \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

## Exercice 18

1.
  - a. Il y a 6 sommets donc ce graphe est d'ordre 6.
  - b. Il n'y a pas d'arête reliant A et R donc ce graphe n'est pas complet.
  - c. Deux sommets quelconques peuvent être reliés par un chemin, donc ce graphe est connexe.  
Par exemple, le chemin A – B – P – C – F – R relie entre eux tous les sommets.
2.
  - a. On cherche le degré de chaque sommet :

Sommet	A	B	C	F	P	R
Degré	4	5	4	4	3	2

Il y exactement deux sommets de degrés impairs, B et P, donc, d'après le théorème d'Euler, il existe un chemin passant par tous les lieux en empruntant une seule fois chacune des rues; ce chemin part de B et se termine en P, ou part de P et se termine en B;

Par exemple : B – A – C – B – F – R – B – P – A – F – C – P.

- b. Pour envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit, il faudrait que tous les sommets soient de degrés pairs, ce qui n'est pas le cas.  
Un tel parcours n'existe donc pas.

3. La matrice d'adjacence de ce graphe est une matrice carrée d'ordre 6 ne contenant que des 0 et des 1; on met un 1 à l'intersection de la ligne correspondant à un sommet X et à la colonne correspondant à un sommet Y si, dans le graphe, il y a une arête reliant X à Y. On met 0 sinon.  
La matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

Alexanderplatz correspond au 1<sup>er</sup> sommet A, et le Reichstag correspond au 6<sup>e</sup> sommet R.

Le nombre situé à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 6 (ou de la ligne 6 et de la colonne 1) dans la matrice  $M^3$  est 5; donc il y a 5 chemins de longueur 3 reliant A à R; ce sont :

A – B – F – R; A – C – F – R; A – C – B – R; A – F – B – R et A – P – B – R.

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, on détermine le parcours le plus court pour aller d'Alexanderplatz au Reichstag.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>P</i>	<i>R</i>
0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	6 <i>A</i>	5 <i>A</i>	3,5 <i>A</i>	2 <i>A</i>	$\infty$
	6 <i>A</i>	4 <i>P</i>	3,5 <i>A</i>		$\infty$
	6 <i>A</i>	4 <i>P</i>			8,5 <i>F</i>
	6 <i>A</i>				8,5 <i>F</i>
					6,5 <i>B</i>

Le trajet le plus court permettant de relier d'Alexanderplatz au Reichstag est de 6,5 kilomètres. C'est la chaîne : *ABR*.

## *Quelques conseils de travail en classe préparatoire*

---

1. Il faut se mettre au travail tout de suite. Une semaine en classe préparatoire vaut bien 3 ou 4 semaines de lycée et vous risquez d'être vite perdus. Beaucoup d'élèves se découragent dès ce début de l'année mais c'est un passage obligé et, rassurez-vous, tout le monde peut tenir ce rythme de travail.
2. Il faut apprendre son cours. Apprenez à écouter, à lire, à comprendre, à savoir restituer les définitions, les propriétés, les théorèmes mais aussi les exemples du cours.
3. Le travail régulier, quotidien est indispensable pour assimiler toutes les notions car il est plus facile d'assimiler un cours récent. Ne laissez pas tomber un cours pendant une semaine pour vous focaliser sur une autre discipline en vue d'un contrôle. Il vous sera alors très difficile de revenir dessus.
4. Elaborez des fiches de cours avec des codes de couleurs... et pensez à les relire régulièrement.
5. Elaborez également des fiches d'erreurs. Comprendre son erreur ne signifie pas qu'on ne va pas la refaire. Combien de points supplémentaires pourriez-vous avoir à chaque devoir en évitant ces erreurs ? Il faut se les noter avec les corrections et les revoir très fréquemment. C'est pour vous y aider que Monsieur VAILLANT vous a distribué un livret qui doit vous permettre de référencer les principales erreurs que vous commettez.
6. Il faut faire et refaire les exercices. Lire est une activité trop passive qui ne permet pas une bonne assimilation. Faites au minimum 3 fois chaque exercice (une fois lorsqu'on le fait en classe, une deuxième fois dans les jours qui suivent puis une troisième fois pour préparer un contrôle ou une interrogation).
7. Apprenez à « sécher » longtemps sur un exercice. C'est en réussissant des exercices difficiles qu'on prend confiance et qu'on progresse.
8. Faites les exercices avec le cours sous les yeux pour faciliter son assimilation et vérifier de manière précise et rigoureuse son contenu.
9. Apprenez à vous vérifier. Il vous faut éviter de trop nombreuses erreurs d'étourderie. La relecture ligne après ligne doit être automatique. Ce mécanisme peut s'acquérir en s'entraînant à poser son stylo après chaque ligne écrite sur des exercices faits à la maison.
10. Il ne faut pas avoir peur d'explorer des pistes et de revenir sur ses pas si elles ne donnent rien. Si on reste bloqué sans rien faire, l'imagination est paralysée.
11. La rédaction, les justifications, l'argumentation demandent des efforts mais font partie de la formation à la rigueur des élèves de classes préparatoires. Soyez précis dans vos affirmations, vérifiez les hypothèses, les articulations logiques (donc, implique, est équivalent à ...). Refaites les exercices avec la rédaction et comparez-la avec celle donnée par votre professeur.
12. Soyez à la fois altruiste et égoïste :  
Altruiste car, même si les places sont chères, vous avez beaucoup plus à gagner qu'à y perdre en participant à un groupe, en échangeant, en créant un environnement propice au travail et à la réussite de chacun.  
Egoïste : ne sortez jamais de cours sans avoir compris quelque chose. Moquez-vous des regards des autres qui vous font croire qu'ils ont compris. Vous mettrez beaucoup de temps à trouver une solution chez vous tout seul alors qu'un professeur peut vous la donner tout de suite.

**13.** Pour finir n'oubliez pas que  votre réussite dépend de votre organisation, du temps que vous pourrez consacrer à votre formation. Il est souhaitable de continuer une activité culturelle, sportive, associative, etc...pendant vos années de classes préparatoires mais il faut vous organiser pour ne faire et ne penser qu'à une chose à la fois.

Enfin, ces quelques conseils ne peuvent remplacer ceux que vos professeurs pourront vous donner de manière individuelle tout au long de ces deux années difficiles, ni surtout ceux que vous aurez trouvés vous-même, avec votre propre expérience.