

# Cahier de vacances

MPSI  $\Rightarrow$  MP

Réviser son année en 12 exercices

\*\*\*\*\*

C'est les vacances... Enfin presque !

- Voici un devoir maison qui vous propose, sans prétendre à l'exhaustivité, un tour d'horizon de votre année en mathématiques. Faites un effort de recherche sur toutes les questions, même si vous n'arrivez pas à les résoudre, l'aller-retour entre la partie du cours concernée et l'exercice sera profitable.
- Vous rédigez avec soins et concision vos solutions sur une copie **anonymisée** par un code personnel ; la copie est **à rendre le jour du stage de rentrée**, sera corrigée mais ne sera pas notée.
- La plupart des exercices sont des questions de cours ou d'application du cours sauf ceux signalés par un symbole [♠] qui nécessiteront peut-être une recherche plus approfondie. Les [♥] signalent des questions classiques donc incontournables.

\*\*\*\*\*

## Thème 1. Calculs algébriques

### ► Exercice 1.

- ☐ Connaître les sommes classiques. Calculer des sommes simples ; des sommes doubles.
- ☐ Établir des inégalités.

1. Calculer en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$  les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^n k(n-k) \quad ; \quad B_n = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (k-\ell)^2 \quad ; \quad C_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \quad ; \quad D_n = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \frac{1}{2^{k+\ell}}.$$

2. Rappeler la définition du coefficient binomial puis énoncer la formule du binôme de Newton.

Soit  $x \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Justifier les trois identités suivantes :

$$[\heartsuit] \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad ;$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad ;$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2.$$

[♠] En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

3. Pour  $x \in \mathbb{C}$ , on pose  $S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ .

(a) [♥] Montrer que :  $\forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ .

(b) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de son produit scalaire canonique.

(c) [♠] En déduire que :  $\forall x \in [0, 1], S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

► **Exercice 2.**

- ☐ Sommes géométriques.
- ☐ Calculs avec des nombres complexes.
- ☐ Racines de l'unité. Sous-groupe.

Soit un entier  $n \geq 2$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .

1. Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\omega_k = \omega^k$ .
  - (a) Que vaut  $|\omega_k|$ ?  $\omega_k^n$ ? Montrer que  $\{\omega_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe du groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ . Quel est son cardinal?
  - (b) [♥] Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$ .
2. Montrer que  $|\omega - 1| = 2 \sin \frac{\pi}{n}$ .
3. [♠] On pose  $W_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_{k+1} - \omega_k|$ .
  - (a) Calculer  $W_n$ .
  - (b) Justifier que la suite  $(W_n)_n$  converge et donner sa limite. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

## Thème 2. Algèbre linéaire

► **Exercice 3.**

- ☐ Montrer qu'une partie d'un ev est un ss-ev.
- ☐ Justifier que deux ss-ev sont supplémentaires.

On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions définies et continues de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

1. Soit les sous-ensembles :

$$P = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = \varphi(x) \right\} \quad \text{et} \quad I = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(-x) = -\varphi(x) \right\}$$

- (a) Établir que  $P$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On admet que  $I$  est également un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - (b) [♥] Rappeler la définition d'espaces supplémentaires puis justifier que  $P$  et  $I$  sont deux sous-espaces supplémentaires dans  $E$ .
2. On rappelle qu'une fonction  $\varphi$  de  $E$  est bornée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq M$$

[♥] Montrer que le sous-ensemble  $B$  de  $E$  des fonctions bornées est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

3. Soit le sous-ensemble  $V = \left\{ \varphi \in E \mid \varphi(0) = \varphi(1) \right\}$ .

Justifier que  $V$  est un hyperplan de  $E$  et déterminer un sous-espace supplémentaire de  $V$  dans  $E$ .

4. [♠] Soit le sous-ensemble  $F = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(2x) = \varphi(x) \right\}$ .

Justifier que  $F$  est une droite vectorielle.

► **Exercice 4.**

- ☐ Application linéaire.
- ☐ Noyau et image.
- ☐ Projecteur.

1. **Un exemple.** Les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  sont notés en colonne. On désigne par  $\mathcal{C}_n$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

(a) On définit l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -x - y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Justifier que  $f$  est une application linéaire et donner la matrice de  $f$  de la base  $\mathcal{C}_2$  vers la base  $\mathcal{C}_3$ .  
Montrer que  $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$  et déterminer  $\text{Im } f$  (donner une base et la dimension).

L'application  $f$  est-elle surjective ? Injective ? Bijective ?

(b) On considère l'application linéaire  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer  $\text{Ker } g$  (donner une base et la dimension). Écrire la formule du rang pour  $g$  et en déduire l'espace  $\text{Im } g$ . L'application  $g$  est-elle surjective ? Injective ? Bijective ?

(c) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer  $g \circ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ . Que peut-on dire de l'application  $g \circ f$  ?

(d) Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $f \circ g$  dans la base  $\mathcal{C}_3$ . En déduire que  $f \circ g$  est un projecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Préciser le noyau et l'image de  $f \circ g$  (donner une base de ces espaces) ; que peut-on dire de ces deux sous-espaces ?

2. On considère  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ .

- (a) Dans cette question, on suppose que  $g \circ f = \text{Id}_E$ . Justifier que  $f$  est injective et  $g$  surjective. Montrer que  $f \circ g$  est un projecteur de  $F$ , que  $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker } g$  et que  $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im } f$ .
- (b) [♠] Dans cette question, on suppose que  $f$  est injective,  $g$  surjective et  $f \circ g$  est un projecteur. Justifier que  $g \circ f = \text{Id}_E$ .

► **Exercice 5.**

- ☐ Matrice d'un endomorphisme.
- ☐ Calculs de rang, d'inverse, de noyau, d'image.
- ☐ Formule de changement de base.

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $E = \mathbb{R}^3$  et on considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $f$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à la matrice  $A$  ; on note enfin  $\text{Id}_E$  l'application identité de  $E$ .

- 1. [♥] Une étude de l'endomorphisme  $f$ .
  - (a) Déterminer le rang de  $f$ , son noyau et son image.

- (b) Déterminer le rang de  $f - \text{Id}_E$ , montrer que le vecteur  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  appartient au noyau de  $f - \text{Id}_E$  et en déduire  $\ker(f - \text{Id}_E)$ .
- (c) Soient  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $f(v)$  et  $f(w)$  en fonction de  $v$  et  $w$ .
- (d) Montrer que  $\mathcal{C} = (u, v, w)$  est base de  $E$ .
- (e) Sans autre calcul, donner la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$ . On notera  $D$  cette matrice.
2. [♥] Un calcul des puissances de  $A$ .
- (a) Déterminer  $P$ , la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$  et exprimer pour tout entier naturel  $n$ , la matrice  $A^n$  à l'aide de  $P$ ,  $D$ ,  $n$  et  $P^{-1}$ .
- (b) Donner explicitement la première colonne de  $A^n$  en fonction de  $n$ .
3. [♠] On dit qu'un réel  $\lambda$  est une **valeur propre** de  $A$  lorsqu'il existe un vecteur colonne  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  non nul tel que  $AX = \lambda X$ .  
Déterminer toutes les valeurs propres de  $A$ .

### ► Exercice 6.

- ☐ Calculs matriciels.
- ☐ Exercice de synthèse dans un espace de polynômes.

On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la matrice carrée  $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de taille  $n$  dont les coefficients sont donnés par :

$$d_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j ; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , calculer les coefficients  $(MD)_{k,\ell}$  et  $(DM)_{k,\ell}$  des matrices produits  $MD$  et  $DM$ .
2. [♥] En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec  $D$ .

On désigne par  $\mathbb{R}_n[X]$  le sous-espace de  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Nous considérons l'ensemble  $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$  ainsi que l'application  $\psi$  définie de  $\mathbb{R}[X]$  vers lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \psi(P) = XP'.$$

3. Que vaut  $\dim \mathbb{R}_n[X]$ ? Montrer que  $E_n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
4. Justifier que la famille  $\mathcal{B}_n = X, X^2, \dots, X^n$  est une base de  $E_n$ . Quelle est la dimension de  $E_n$ ?
5. Montrer que  $\psi$  est linéaire puis qu'elle induit un endomorphisme  $\psi_n$  de l'espace  $E_n$ . Que vaut la matrice de  $\psi_n$  dans la base  $\mathcal{B}_n$ ? En déduire  $\det \psi_n$ .
6. [♠] On note  $\mathcal{C}(\psi_n)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E_n$  qui commutent avec  $\psi_n$ .
  - (a) Justifier que  $\mathcal{C}(\psi_n)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{L}(E_n)$  des endomorphismes de  $E_n$ .
  - (b) Déterminer la dimension de  $\mathcal{C}(\psi_n)$ .

## Thème 3. Analyse réelle

### ► Exercice 7.

- ☐ Calculs de limites ; croissances comparées usuelles.
- ☐ Développements limités ; équivalents simples (à réviser!).

Calculer les limites suivantes :

1. en utilisant des comparaisons ou croissances comparées usuelles :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

2. En utilisant des équivalents ou développements limités :

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{x} \quad ; \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad (f) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cos(\theta) - \sin(\theta)}{\theta^3}.$$

3. [♠] Comme vous pourrez :

$$(g) \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos(t^2) \tan\left(\frac{1}{t}\right) \quad ; \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - \cos(x)} \ln(x) \quad ; \quad (i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

### ► Exercice 8.

- ☐ Étude de fonction.
- ☐ Théorème de la bijection monotone ; dérivabilité d'une réciproque.
- ☐ Suite récurrente. Série.

La fonction tangente hyperbolique, notée  $\text{th}$ , est définie par  $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ .

1. [♥] Étude de la fonction  $\text{th}$ .

- (a) Justifier que  $\text{th}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  puis étudier sa parité.
- (b) Justifier que  $\text{th}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x).$$

- (c) Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $\text{th}$ .
- (d) Calculer les deux limites  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{th}(x)$ .
- (e) Donner le tableau de variation de la fonction et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct en précisant les asymptotes.

2. [♥] Étude de la réciproque de  $\text{th}$ .

- (a) Justifier que la fonction  $\text{th}$  induit une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $J$  à préciser. On note  $\text{argth}$  la réciproque ainsi définie ; donner le tableau de variation de la fonction  $\text{argth}$ .
- (b) Étudier la dérivabilité de la fonction  $\text{argth}$  et justifier que, lorsque cela a un sens, nous avons :

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

- (c) En déduire que pour tout  $x \in J$ ,  $\text{argth}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ .

3. On considère la suite  $(u_n)_n$  définie par la relation de récurrence :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \text{th}(u_n).$$

(a) Montrer que  $(u_n)_n$  est strictement décroissante. En déduire que  $(u_n)_n$  converge puis déterminer sa limite.

(b) [♠] Justifier que  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{3}$ . En déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .

► **Exercice 9.**

☐ Définition d'une limite.

☐ Étude d'une suite récurrente.

1. Dans cette question on considère une suite  $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$ .

(a) Écrire la définition **avec quantificateurs** de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$ .

(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > n_0$ ,

$$|v_n - v_{n_0}| < (n - n_0) \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire que pour tout  $n > n_0$ ,

$$\frac{|v_n|}{n} < \left( \frac{n - n_0}{n} \right) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|v_{n_0}|}{n}.$$

(d) Justifier qu'il existe  $n_1 \geq n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ ,  $\frac{|v_{n_0}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

(e) Conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 0$ .

2. Soit une suite  $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$ .

En considérant la suite  $(v_n)_n$  définie par  $v_n = u_n - n\ell$  montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

3. [♠] Dans cette question on considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}_+^*.$$

(a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

(b) Calculer  $u_{n+1}^3$  en fonction de  $u_n$  puis en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^3 - u_n^3) = 3$$

(c) En déduire l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}.$$

La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$  est-elle convergente ?

► **Exercice 10.**

- Calculs d'intégrales.

Justifier les égalités ci-dessous.

Avant de commencer tout calcul, on commencera par vérifier que les fonctions intégrées sont continues ou prolongeables par continuité sur les segments considérés.

$$(a) \int_1^e t \ln(t) dt = \frac{e^2 + 1}{4} \quad ; \quad (b) \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{32} \quad ; \quad (c) \spadesuit \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) dt = \ln \frac{\pi}{4}.$$

**Thème 4. Probabilités**► **Exercice 11.**

- Variables aléatoires.  
□ Lois de probabilités usuelles (Bernoulli, binomiale).

Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace probabilisé fini. On fixe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  ainsi qu'un réel  $p \in ]0, 1[$ . On considère une famille de variables aléatoires *mutuellement indépendantes*  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\{0, 1\}$  qui suivent toute une même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

1. Expliciter la loi de probabilité de  $X_1$ .
2. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires :  $S = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $T = \prod_{k=1}^n X_k$ .

► **Exercice 12.**

- Algorithmique.  
□ Arithmétique.  
□ Loi de probabilité.

Étant donné  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls, on note  $a|b$  la relation «  $a$  divise  $b$  » et  $a \wedge b$  le PGCD de  $a$  et  $b$ .

Étant donné un entier  $n \geq 2$ , on note  $\mathcal{A}_n = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k \wedge n = 1\}$ . C'est l'ensemble des entiers  $k$  compris entre 1 et  $n$  tels que  $k$  et  $n$  sont premiers entre eux.

Par exemple :  $\mathcal{A}_6 = \{1, 5\}$ ,  $\mathcal{A}_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

1. [♥] Écrire une fonction Python `pgcd(a,b)` qui calcule  $a \wedge b$ . Tester la fonction en machine.
2. Écrire une seconde fonction Python `premiers(n)` qui retourne l'entier  $\text{card } \mathcal{A}_n$ . Tester la fonction en machine.

Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

3. [♥] Donner la loi de probabilité de  $U$ . Calculer l'espérance et la variance de  $U$ .
4. [♠]

(a) Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d$  divise  $n$ . Montrer que  $\mathbf{P}(d|U) = \frac{1}{d}$ .

(b) Soit  $p_1 < \dots < p_r$  tous les diviseurs premiers de l'entier  $n$ .  
Montrer que les événements  $(p_1|U), \dots, (p_r|U)$  sont indépendants.

(c) En déduire que

$$\mathbf{P}(U \wedge n = 1) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

5. Démontrer que  $\text{card } \mathcal{A}_n = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ .

\*\*\*\*\*

♡ Bonnes vacances ♠

\*\*\*\*\*

